Anzahlbestimmungen für das Strahlennetz (lineare Kongruenz).

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Ernst Weiss.

Mittwoch, den 13. März 1907, mittags 12 Uhr

in der Aula Leopoldina:

Vortrag

über das Thema:

„Die synthetische Geometrie der Neuzeit verglichen mit der Geometrie der Griechen"

und

Promotion.

ACAD. LAND. BAT. BIBL.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1907.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität zu Breslau.

Referent: Prof. Dr. **R. Sturm.**

Termin der mündlichen Prüfung: 20. Februar 1907.

Meinen Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548224_0049

Eine lineare Kongruenz oder ein Strahlennetz, d. h. die Gesamtheit der Strahlen, die 2 gegebene Graden, die Leitstrahlen, treffen, ist durch 8 einfache Bedingungen bestimmt, da jeder der beiden Leitstrahlen ∞^4 Lagen im Raume einnehmen kann.

Hermann Schubert hat sich nun in § 27 seines „Kalkül der abzählenden Geometrie“ die Aufgabe gestellt, die Anzahl der Strahlennetze zu ermitteln, wenn man auf die verschiedenste Weise 8 einfache Bedingungen kombiniert. Seine Resultate gewinnt er auf folgende Art. Er benutzt zwei Spezialfälle von Strahlennetzen, nämlich 1) solche, deren Leitstrahlen sich schneiden, ohne unendlich nahe zu sein, 2) solche, deren Leitstrahlen unendlich nahe sind, ohne sich zu schneiden. Alsdann stellt er Formeln auf, durch die sich die Anzahl der allgemeinen Strahlennetze aus den Anzahlen dieser beiden speziellen Strahlennetze berechnen lässt.

Eine allgemeine Lösung, d. h. ohne jede Vermittlung von Spezialfällen, haben einige dieser Aufgaben durch Herrn Prof. Sturm gefunden[1]). Er behandelt nämlich folgendes Problem: „Die Anzahl N der Strahlennetze ist zu ermitteln, welche durch α ($\leqq 4$) gegebene Strahlen gehen und $8-2\alpha$ gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl zusenden“. Während der Beweis für die Fälle $\alpha = 4$ und $\alpha = 3$ direkt geführt wird, werden zur Behandlung der Fälle $\alpha = 2$ und $\alpha = 1$ einige Resultate von Hirst[2]) herangezogen, welche

---

[1]) Sturm, Liniengeometrie. Bd. I. S. 125.

[2]) Hirst, On the Correlation of two planes, London Math. Soc. Bd. 5. S. 40.

die Anzahlen von Korrelationen zwischen zwei Ebenen betreffen. Für den Fall $\alpha = 0$ wird auf die Schubertsche Lösung verwiesen.

Dasselbe Problem ist ferner von V. Martinetti[1]) für sämtliche Fälle ($\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$) behandelt worden. Dieser findet die Lösungen mittels des Schubertschen Prinzips von der Erhaltung der Anzahl. Er spezialisiert aber nicht die gesuchten Strahlennetze, sondern die gegebenen Bedingungen, indem er nämlich die gegebenen Strahlenbüschel so legt, dass immer je zwei einen Strahl gemeinsam haben.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit soll es nun sein, die von Schubert gestellten Aufgaben 1) direkt zu lösen, d. h. ohne Benutzung der Hirstschen Resultate, 2) auch allgemein, d. h. ohne Verwendung des Schubertschen Prinzips von der Erhaltung der Anzahl.

Um die einzelnen Aufgaben kürzer formulieren zu können, sollen im folgenden die von Schubert eingeführten Bezeichnungen für die verschiedenen Bedingungen mit einer kleinen Änderung benutzt werden. Die beiden Leitgraden eines Strahlennetzes werden g und h genannt. Es soll dann bezeichnen

g oder h: die Bedingung, dass der Leitstrahl g oder h eine beliebig gegebene Grade zu treffen hat. Diese Bedingung ist einfach, da die betreffende Leitgrade nicht mehr ∞^4, sondern nur ∞^3 Lagen einnehmen kann.

g_e, h_e (g_p, h_p): g bezw. h soll in einer gegebenen Ebene liegen (durch einen gegebenen Punkt gehen). Zweifache Bedingung.

g_s, h_s: g bezw. h soll einem gegebenen Strahlenbüschel angehören. Dreifache Bedingung.

g_f, h_f[2]): g bezw. h ist gegeben, ist „fest“. Vierfache Bedingung.

---

[1]) Martinetti, Su un problema di geometrica numerativa relativo alle congruenze lineari; Rivista di Matematica 1893.

[2]) Diese Bezeichnung ist auf Vorschlag von Herrn Prof. Sturm für das Schubertsche G bezw. H gesetzt.

β: Das Strahlennetz soll in ein gegebenes Strahlenbüschel einen Strahl senden. Den einen Leitstrahl kann man also beliebig wählen (∞^4 Lagen); der zweite muss aber, damit das Strahlennetz einen Strahl in dem gegebenen Strahlenbüschel besitzt, durch denjenigen Strahl aus dem Büschel gehen, der von dem ersten Leitstrahl getroffen wird. Der zweite Leitstrahl hat also nur ∞^3 Lagen zur Verfügung. Die Bedingung ist daher einfach, $[8-(4+3)=1]$.

B: Das Strahlennetz soll einen gegebenen Strahl enthalten. Da jeder der beiden Leitstrahlen durch diesen gegebenen Strahl gehen muss, also nur ∞^3 Lagen einnehmen kann, ist die Bedingung zweifach.

Wird das Strahlennetz mehreren Bedingungen der gleichen Art unterworfen, so soll das durch einen oberen Index angezeigt werden, sodass z. B. β^2 bedeutet, das Strahlennetz soll in zwei gegebene Strahlenbüschel je einen Strahl senden.

Kombiniert man diese Bedingungen in der Weise, dass die Summe ihrer Vielfachheiten 8 ist, so genügen sie, um eine endliche Anzahl von Strahlennetzen zu bestimmen. Zu ermitteln ist in jedem Falle diese Anzahl der bestimmten Strahlennetze.

Bevor jedoch an die Lösung dieser Aufgaben geschritten wird, soll eine Reihe von Hilfssätzen vorangeschickt werden, um dann später die einzelnen Aufgaben übersichtlicher gestalten zu können.

I. Hilfssätze.

1.

Sämtliche Graden, die vier entsprechende Strahlen aus vier beliebig gelegenen projektiven Strahlenbüscheln treffen, bilden eine Regelfläche achten Grades.

Die vier beliebig im Raume gelegenen Strahlenbüschel seien β_1, β_2, β_3, β_4. Zunächst fassen wir nur die drei ersten von ihnen ins Auge. Die Graden nun, welche drei Graden

dieser Büschel treffen, die in der Projektivität entsprechend sind, bilden eine Kongruenz [3,3][1]). In dem vierten Strahlenbüschel β_4 lässt sich folgende Korrespondenz konstruieren. Einem Strahl x von β_4 entspricht infolge der Projektivität zwischen den vier Büscheln ein Gradentripel bestehend aus je einem Strahl der drei andern Büschel. Es sei nun l irgend eine Grade im Raume. Jenes Gradentripel und l werden von zwei Graden getroffen, von denen jede einem Strahl aus β_4 begegnet, den wir x′ nennen. Jedem Strahl x entsprechen also 2 Strahlen x′. Wieviele x gehören infolge dieser Zuordnung zu einem x′? l scheidet aus der oben erhaltenen Kongruenz [3,3] nach dem Satze über die gemeinsamen Strahlen eines Komplexes und einer Kongruenz[2]) eine Regelfläche sechsten Grades aus. Die Graden dieser Regelfläche gehen durch l und irgend ein Tripel entsprechender Graden aus β_1, β_2, β_3. Jeder Strahl x′ aus β_4 wird demnach von sechs Graden mit der eben angegebenen Eigenschaft getroffen; und zwar gehört jeder von diesen sechs zu einem besonderen Tripel. Möglich wäre es zwar, dass zwei Graden zu einem Tripel gehören, wenn nämlich die beiden Treffgraden von l und einem Tripel demselben Strahl von β_4 begegnen würden; bei der Allgemeinheit der Projektivität und der beliebigen Lage von l wird dies aber nicht der Fall sein. Jene sechs Tripel, zu denen der Strahl x′ geführt hat, haben jedes einen in der Projektivität der vier Büschel entsprechenden Strahl in β_4. Diese sechs Strahlen sind ersichtlich die dem Strahl x′ zugeordneten. Durch unsere Zuordnung ist also in dem Büschel β_4 eine Korrespondenz [6,2] mit 8 Koinzidenzen entstanden. Eine Koinzidenz bedeutet in diesem Falle: eine Grade, die l und ein Tripel entsprechender Graden in β_1, β_2, β_3 trifft, begegnet auch der jenem Tripel entsprechenden Grade in β_4. Jede

---

[1]) Roccella, Sugli enti geometrici dello spazio di rette etc. Piazza Armerina 1882, sowie: Sturm, Über Strahlenkongruenzen von gleichem Bündel- und Feldgrad. Crelles Journal Bd. 101 S. 194.

[2]) Sturm, Liniengeometrie I. S. 43.

beliebige Grade l wird demnach von 8 Graden getroffen, die vier entsprechenden Strahlen von $\beta_1, .. \beta_4$ begegnen; die an der Spitze stehende Behauptung ist damit erwiesen.

2.

Die Graden, welche zwei beliebig gegebene Graden und zwei entsprechende Strahlen aus zwei Strahlenbüscheln treffen, die durch eine Korrespondenz [m, n] *verbunden sind, bilden eine Regelfläche vom Grade* 2(m + n).

Die beiden Graden seien l_1 und l_2. Wir betrachten zunächst nur alle Graden, die l_1 und 2 entsprechende Strahlen aus den beiden Strahlenbüscheln treffen. In einer beliebigen Ebene ergeben sich durch Schnitt mit l_1 und den beiden Büscheln ein Punkt und zwei Punktreihen, die in einer Korrespondenz [m, n] stehen. Graden in der Ebene, welche durch diesen Punkt gehen und die beiden Punktreihen in entsprechenden Punkten schneiden, sind dann solche, wie wir sie zunächst suchen. In dem Strahlenbüschel um den Schnittpunkt von l_1 in der beliebigen Ebene entsteht ebenfalls eine Korrespondenz [m, n], wenn wir solche Strahlen einander zuordnen, die nach entsprechenden Punkten in den beiden Punktreihen gehen. Die m + n Koinzidenzen sind ersichtlich die einzigen Strahlen in der beliebigen Ebene mit den zunächst verlangten Eigenschaften. Die dualen Ueberlegungen zeigen, dass auch durch jeden beliebigen Punkt m + n solcher Strahlen gehen, sodass also die Strahlen, die l_1 und 2 entsprechende Strahlen aus den beiden Büscheln treffen, eine Kongruenz [m + n, m + n] bilden.

l_2 sondert aus dieser Kongruenz nach dem schon oben erwähnten Satze eine Regelfläche vom Grade 2(m + n) aus, deren sämtliche Graden ersichtlich unsere Behauptung erfüllen.

3.

Die Strahlen im Raume, welche vier beliebig gegebene Strahlenbüschel in vier Strahlen treffen, die auf einer Regelschar liegen, bilden eine Kongruenz [3,3].

β_1, β_2, β_3, β_4 seien die vier beliebig im Raume gelegenen Strahlenbüschel. E sei eine beliebige Ebene. Zunächst wollen wir nach denjenigen Graden in E suchen, welche die Büschel β_1, β_2, β_3 in drei solchen Graden treffen, dass die Trägerfläche der von diesen drei Graden bestimmten Regelschar die Ebene des Strahlenbüschels β_4 berührt, also in einem Gradenpaar schneidet. Dies tritt ersichtlich ein, wenn die drei getroffenen Graden die Ebene von β_4 in drei Punkten schneiden, die in grader Linie liegen; denn dann gehört diese Grade zur Leitschar, und auch von der Regelschar muss eine Grade in dieser Ebene liegen.

Die drei Büschel β_1, β_2, β_3 schneiden E in drei Punktreihen. In diesen entsteht nun durch Vermittlung des Gradenfeldes in der Ebene von β_4 eine Trilinearität, indem man nämlich drei solche Punkte einander zuordnet, die von drei Graden aus β_1, β_2, β_3 eingeschnitten werden, deren Schnittpunkte mit der Ebene von β_4 in grader Linie liegen. Um diese Verwandtschaft als Trilinearität zu erkennen, müssen wir die charakteristische Eigenschaft einer solchen nachweisen, dass nämlich zwei beliebigen Punkten auf zweien der Trägerpunktreihen in der dritten Punktreihe ein einziger Punkt zugeordnet ist. Nehmen wir je einen beliebigen Punkt auf den beiden Schnittlinien (E, β_1) und (E, β_2), sie bestimmen eindeutig je einen Strahl aus β_1 und β_2. Diese beiden Strahlen schneiden in die Ebene von β_4 zwei Punkte ein, durch deren Verbindungslinie ein Strahl aus β_3 getroffen wird, der in die dritte Punktreihe (E, β_3) einen einzigen Punkt einschneidet. Dieser ist der durch unsere Verwandtschaft den beiden Ausgangspunkten zugeordnete Punkt, wodurch unsere Verwandtschaft als Trilinearität erkannt ist.

Das Erzeugnis einer Trilinearität zwischen zwei Punktreihen, d. h. der Ort der Graden, auf denen drei zugeordnete Punkte liegen, ist eine Kurve dritter Klasse, zu deren Tangenten auch die Träger der drei Punktreihen gehören[1]).

[1]) Legt man nämlich in die Ebene der drei Punktreihen einen Strahlenbüschel und ordnet in diesem solche Strahlen einander zu,

In der Ebene E gibt es somit eine Kurve dritter Klasse, deren Tangenten zu Regelscharen führen, die in der Ebene von β_4 eine Grade besitzen, deren Trägerfläche also von dieser Ebene berührt wird. Die Schnittlinien (E, β_1), (E, β_2), (E, β_3) sind auch Tangenten dieser Kurve.

Ferner wollen wir nach den Graden in E suchen, die zu Regelscharen führen, deren Trägerflächen durch den Scheitelpunkt des Büschels β_4 gehen. Eine ganz ähnliche Betrachtung wie die vorangehende führt zu einer andern Trilinearität zwischen denselben drei Punktreihen in E, wobei nur das Strahlenbündel um den Scheitel von β_4 die Rolle übernimmt, welche oben das Strahlenfeld in der Ebene von β_4 spielte. Durch dieselben Schlüsse gelangt man zu einer zweiten Kurve dritter Klasse in E, deren Tangenten zu Regelscharen führen, deren Trägerflächen durch den Scheitel von β_4 gehen; die Schnittlinien (E, β_1), (E, β_2), (E, β_3) gehören auch zu den Tangenten dieser Kurve.

Die beiden Kurven dritter Klasse in E haben 9 Tangenten gemeinsam. Drei davon sind, wie sich oben ergeben hat, (E, β_1), (E, β_2), (E, β_3). Von diesen sehen wir zunächst ab und betrachten nur die sechs übrigen. Jede derselben trifft die drei Büschel β_1, β_2, β_3 in je einem Strahl; diese drei Strahlen bestimmen eine Regelschar, deren Trägerfläche durch den Scheitel von β_4 geht und die Ebene von β_4 berührt.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Weil der Scheitel von β_4 auf der Regelfläche liegen soll, muss von ihm ein Strahl der Regelschar und ein Strahl der Leitschar

---

die nach zugeordneten Punkten der drei Punktreihen gehen, so entsteht auch in dem Strahlenbüschel eine Trilinearität. Die Zahl der Koinzidenzen in einer Trilinearität, deren drei Träger sich vereinigt haben, ist nach einem bekannten Satze drei. Durch jeden beliebigen Punkt gehen also drei Graden unseres Erzeugnisses. Die Schnittpunkte des ersten und zweiten Trägers mit dem dritten Träger müssen, als Punkte des ersten bezw. zweiten Trägers aufgefasst, auf dem dritten einen entsprechenden Punkt besitzen. Ersichtlich ist die Verbindungslinie der drei entsprechenden Punkte der dritte Träger selbst; dieser gehört also zum Erzeugnis; aus entsprechenden Gründen gilt dasselbe für den ersten und zweiten Träger.

ausgehen. Weil aber die Ebene von β_4 Berührungsebene der Regelfläche sein soll, muss einer von diesen beiden Strahlen in sie hineinfallen, also entweder der Strahl der Leitschar oder der Strahl aus der Regelschar selbst.

Wir müssen ermitteln, wie oft der erste Fall eintritt, oder anders ausgesprochen, wieviele Strahlen des Büschels β_4 die β_1, β_2, β_3 in drei solchen Strahlen treffen, die E in drei alliniierten Punkten schneiden. Durch das Büschel β_4 entsteht in den drei Büscheln β_1, β_2, β_3 eine Projektivität, in der sich diejenigen Strahlen entsprechen, die demselben Strahl in β_4 begegnen. Diese Projektivität überträgt sich auf die drei Punktreihen, welche β_1, β_2, β_3 in E einschneiden. Da es dreimal vorkommt, dass drei entsprechende Punkte in grader Linie liegen, so muss es im Büschel β_4 drei Strahlen mit der gesuchten Eigenschaft geben.

Der erste der beiden allein möglichen Fälle tritt also dreimal ein, demnach muss bei den übrigen $6 - 3 = 3$ Strahlen der zweite Fall eintreten. Betrachten wir einen von diesen drei Strahlen in E, er trifft β_1, β_2, β_3 in drei Graden, die eine Regelschar bestimmen, die auch einen Strahl in β_4 hat. Dieser Strahl in β_4 muss dann auch den Leitstrahl in E treffen, von dem wir ausgingen. Mithin sind wir zu dem gewünschten Resultate gelangt: es gibt drei Graden in E, welche die Büschel β_1, β_2, β_3, β_4 in vier Graden einer Regelschar treffen.

Es ist nun noch Rechenschaft darüber zu geben, warum die drei Schnittgraden von E mit β_1, β_2, β_3 unberücksichtigt blieben, etwa der Schnitt (E, β_1). Die Grade (E, β_1) trifft nicht bloss einen Strahl aus β_1, sondern sämtliche. Die Regelfläche, welche in der Ebene von β_4 ein Gradenpaar besitzen soll, ist eindeutig bestimmt; denn (E, β_1) trifft in β_2 und β_3 je einen Strahl, der der Regelschar angehören muss, diese beiden Graden schneiden die Ebene von β_4 in zwei Punkten, und die Verbindungslinie dieser beiden trifft in β_1 die dritte bestimmende Grade der Regelschar.

Die Regelfläche mit der Eigenschaft durch den Scheitel von β_4 zu gehen wird ersichtlich durch dieselben beiden

Graden aus β_2 und β_3 bestimmt. Nach diesen beiden gehen von dem Scheitel von β_4 zwei Ebenen, und deren Schnittlinie sondert aus β_1 den dritten bestimmenden Strahl der Regelschar aus. Die beiden dritten bestimmenden Strahlen der beiden Regelscharen brauchen keineswegs identisch zu sein, folglich sind auch die beiden Regelscharen nicht identisch; denn ein und dieselbe Regelschar kann nicht in derselben Ebene, hier die Ebene von β_1, zwei Strahlen besitzen. Die Schlüsse, die wir bei den sechs andern gemeinsamen Graden der beiden Kurven dritter Klasse in E gemacht haben, beruhen darauf, dass die beiden Regelscharen identisch sind. Diese Schlüsse sind also für die Grade (E, β_1) nicht möglich, und ebenso nicht für (E, β_2) und (E, β_3). Diese drei Graden blieben also mit Recht unberücksichtigt.

Da die Forderungen unseres Satzes in sich dual sind, so müssen auch durch jeden beliebigen Punkt drei Graden gehen, die $\beta_1, .. \beta_4$ in vier Graden einer Regelschar treffen.

Wir haben also erkannt, dass die Graden mit der geforderten Eigenschaft eine Kongruenz [3,3] bilden.

Für die Anwendung dieses Satzes wird es wichtig sein auch zu wissen, wie sich einige speziell gelegene Elemente zu der Kongruenz verhalten, nämlich die Ebenen und die Scheitelpunkte der vier Strahlenbüschel. Sie sind singulär und inzidieren mit ∞^1 Strahlen der Kongruenz. Es soll untersucht werden, was für eine Kurve diese Strahlen etwa in β_1 umhüllen. Man lege in diese Ebene einen beliebigen Strahlenbüschel; jeder Strahl desselben bestimmt durch die drei von ihm in β_2, β_3, β_4 getroffenen Strahlen eine Regelschar. Es handelt sich um die Frage, wieviele dieser Regelscharen einen Strahl in β_1 besitzen. Von diesen ∞^1 Regelscharen gehen drei durch jeden beliebigen Punkt im Raume[1]).

[1]) Der beliebige Strahlenbüschel induziert nämlich in den drei Büscheln β_2, β_3, β_4 eine Projektivität. Graden, die drei entprechende Strahlen treffen, sind Leitstrahlen irgend einer Regelschar des Systems. Diese Graden bilden nach einem schon auf S. 8 zitierten Satze eine Kongruenz [3.3]. Durch einen beliebigen Punkt gehen also drei solcher Leitgraden. Da nun durch einen Punkt im allgemeinen nur

Es gehen demnach auch durch den Scheitelpunkt von β_1 drei Regelscharen des Systems. Eine von diesen ist ersichtlich diejenige, welche durch den gemeinsamen Strahl des Büschels β_1 und des beliebigen Strahlenbüschels in der Ebene von β_1 bestimmt wird. Für die beiden andern Regelscharen gilt folgendes: sie müssen eine Grade in der Ebene von β_1 haben, weil eine ihrer Leitgraden in dieser Ebene liegt; ferner müssen sie durch den Scheitel von β_1 gehen. Da nun aber die Leitgrade, welche in der Ebene von β_1 liegt, nicht durch den Scheitel geht, so muss es die in die Ebene fallende Grade der Regelschar tun. In jedem beliebigen Strahlenbüschel der Ebene von β_1 gibt es also zwei Graden, die zu einer Regelschar führen, welche in jedem der vier Büschel $\beta_1, \cdots \beta_4$ eine Grade besitzen. Die Graden mit dieser Eigenschaft umhüllen also in der Ebene von β_1 und natürlich auch in den andern Ebenen einen Kegelschnitt.

Duale Erwägungen zeigen, dass in jedem der vier Strahlenbündel um die Scheitelpunkte von β_1, β_2, β_3, β_4 ein Kegel zweiten Grades vorhanden ist, dessen Kanten die bewusste Eigenschaft haben.

Als Ergänzung zu dem an der Spitze stehenden Satze kann also zugefügt werden:

Die Kongruenz [3,3] *besitzt in jeder der vier Ebenen der gegebenen Strahlenbüschel* ∞^1 *Graden, die einen Kegelschnitt umhüllen, und in jedem Bündel um die vier Scheitelpunkte einen Kegel zweiten Grades.*

Von Interesse ist ferner die Frage, ob die Schnittlinie zweier Ebenen der vier Büschel und die Verbindungslinie zweier Scheitel der Kongruenz [3,3] angehören. Wir betrachten etwa die Schnittlinie der Ebenen von β_1 und β_2. Diese Schnittlinie (β_1, β_2) trifft die Büschel β_3 und β_4 je in einem Strahl. Jeder Strahl von β_2 bestimmt nun mit diesen beiden

---

dann eine Leitgrade einer Regelschar gehen kann, wenn der Punkt auf der Trägerfläche liegt, so müssen die drei Leitgraden zu drei verschiedenen Regelscharen des Systems gehören. Es müssen also durch jeden Punkt drei Regelscharen des Systems gehen.

eine Regelschar. Es ist zu untersuchen, wieviele Regelscharen dieses Systems auch in dem Büschel β_1 eine Grade besitzen. Das System der Trägerflächen dieser Regelschar ist ein Büschel, denn jeder beliebige Punkt im Raume bestimmt eine einzige Regelschar des Systems[1]). Durch den Scheitelpunkt des Büschels β_1 geht also eine Regelschar des Systems. Da eine Leitgrade dieser Regelschar nämlich (β_1, β_2) in der Ebene von β_1 liegt, so muss auch die Regelschar selbst eine Grade in dieser Ebene besitzen, und zwar muss diese durch den Scheitel des Büschels β_1 gehen, also dem Büschel β_1 angehören, weil die Trägerfläche durch den Scheitel geht und die Leitgrade (β_1, β_2) es nicht tut. (β_1, β_2) trifft demnach die vier Büschel $\beta_1, \cdots \beta_4$ in vier Graden einer Regelschar.

Für die Verbindungslinie zweier Scheitelpunkte der vier Büschel gilt aus dualen Gründen dasselbe.

Wir haben also als weitere Ergänzung unseres Satzes: *Der Kongruenz* [3,3] *gehören auch die Schnittlinien je zweier Trägerebenen und die Verbindungslinie je zweier Scheitelpunkte der vier gegebenen Büschel an.*

II. Die Gradzahlen der Bedingungen, welche ein Strahlennetz bestimmen.

Da ein Strahlennetz durch seine beiden Leitgraden bestimmt ist, so werden die einzelnen Probleme darauf hinauslaufen, festzustellen, wieviele Gradenpaare im Raume es gibt, die als Leitgraden eines Strahlennetzes aufgefasst ein Strahlennetz bestimmen, das den gegebenen Bedingungen genügt.

1.

$g_f\, h_s\, \beta$.

Der Strahlenbüschel der Bedingung β, den wir kurzweg selbst β nennen wollen, soll einen Strahl des Strahlennetzes

[1]) Von jedem beliebigen Punkte des Raumes geht nämlich eine einzige Grade aus, die die beiden durch (β_1, β_2) aus β_3 und β_4 ausgesonderten Strahlen trifft. Diese Grade begegnet einem einzigen Strahl des Büschels β_2. Dieser Strahl aus β_2 sowie jene aus β_3 und β_4 bestimmen die einzige Regelschar des Systems, die durch den beliebigen Punkt geht.

enthalten; da die eine Leitgrade g infolge der Bedingung g_f gegeben ist, und ja jeder Strahl des Strahlennetzes jeder Leitgrade begegnen muss, kann es nur derjenige Strahl aus β sein, der g trifft. Als Strahl des Strahlennetzes muss dieser auch von der zweiten Leitgrade h getroffen werden. Da es nun in dem beliebigen Strahlenbüschel, auf den der zweite Leitstrahl durch die Bedingung h_s beschränkt ist, nur einen einzigen Strahl gibt, der jenem Strahl aus dem Büschel β begegnet, so erhält man nur ein Leitgradenpaar mit den geforderten Eigenschaften. Also:

Es gibt nur ein einziges Strahlennetz, das eine gegebene Grade zur einen Leitgrade hat, deren zweite Leitgrade einem gegebenen Strahlenbüschel angehört und das einen Strahl in ein weiteres gegebenes Strahlenbüschel sendet.

2.

$g_f\ h_e\ \beta^2\ (g_f\ h_p\ \beta^2)$.

Da die beiden Strahlenbüschel der Bedingung β^2 je einen Strahl des Strahlennetzes enthalten sollen, müssen diejenigen beiden Strahlen der beiden Büschel, die die gegebene Leitgrade g des Strahlennetzes treffen, Strahlen des Strahlennetzes werden. Der zweite Leitstrahl h muss also diesen beiden Strahlen begegnen. Da er ausserdem durch die Bedingung h_e auf eine beliebig gegebene Ebene beschränkt ist, so ist für ihn nur eine einzige Lage möglich, nämlich die Verbindungslinie der beiden Punkte, welche jene erwähnten beiden Strahlen aus den Büscheln β in die Ebene der Bedingung h_e einstossen. Es gibt also nur ein Leitstrahlenpaar.

Bei den Bedingungen $g_f\ h_p\ \beta^2$ ist ebenfalls, wie eine ganz ähnliche Überlegung zeigt, nur ein Leitstrahlenpaar möglich. Beide Ergebnisse vereinigen wir in dem Satze:

Es ist nur ein einziges Strahlennetz möglich, das eine gegebene Grade zu dem einen Leitstrahl hat, dessen zweiter Leitstrahl in einer gegebenen Ebene liegt oder durch einen gegebenen Punkt geht und welches in zwei gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzt.

3.

$g_f\ h\ \beta^3$.

Der gegebene Leitstrahl g trifft je einen Strahl in den drei Strahlenbüscheln der Bedingung β^3. Durch diese drei Strahlen sowie wegen der Bedingung h durch einen beliebig gegebenen vierten Strahl muss der zweite Leitstrahl h gehen. Da es nun zwei Graden gibt, die vier beliebigen Graden im Raume begegnen, so kann h zwei verschiedene Lagen annehmen. Der gegebene g mit h in irgend einer der beiden Lagen führt zu dem gewünschten Strahlennetz. Also:

Es gibt zwei Strahlennetze, die eine gegebene Grade zu der einen Leitgrade haben, deren zweite Leitgrade einer beliebigen Grade begegnet und die in drei gegebene Strahlenbüschel je einen Strahl senden.

4.

$g_f\ \beta^4$.

Der gegebene Leitstrahl g scheidet aus den vier Strahlenbüscheln der Bedingung β^4 je einen Strahl aus, der dem Strahlennetze angehören muss. Der zweite Leitstrahl h muss also ebenfalls durch diese vier Strahlen gehen. Ausser g gibt es aber nur noch eine einzige Grade, die diesen vier Graden begegnet, es ist demnach nur ein einziges Leitstrahlenpaar mit den geforderten Eigenschaften vorhanden.

Es lässt sich nur ein einziges Strahlennetz finden, das eine gegebene Grade zu der einen Leitgrade hat und in vier gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzt.

5.

$g_s\ h_s\ \beta^2$.

Der Strahlenbüschel, in welchem der Leitstrahl g liegen soll, führt zu einer Projektivität zwischen den beiden Strahlenbüscheln der Bedingung β^2, indem man solche Strahlen einander zuordnet, die nach demselben Strahl des Büschels der g gehen. In dem Strahlenbüschel, auf den der Leitstrahl h beschränkt ist, entsteht dann eine Konjektivität, in der

sich zwei solche Strahlen entsprechen, die nach zugeordneten Strahlen der beiden Büschel β gehen. Jede der beiden Koinzidenzen in dieser Konjektivität trifft also zwei zugeordnete Strahlen der Büschel β, d. h. zwei solche Strahlen, die von demselben Strahl des Büschels der g kommen. Dieser Strahl aus dem g-Büschel und der Koinzidenzstrahl in dem h-Büschel liefern mithin ein Leitstrahlenpaar mit den gewünschten Eigenschaften. Die zwei Koinzidenzen führen zu zwei solchen Paaren. Demnach:

Es gibt zwei Strahlennetze, deren beide Leitgraden je einem gegebenen Strahlenbüschel angehören und in zwei andere beliebig gegebene Strahlenbüschel je einen Strahl senden.

6.

$g_s\ h_e\ \beta^3$ ($g_s\ h_p\ \beta^3$).

Der Strahlenbüschel, dem der Leitstrahl g angehören soll, induziert in den drei Büscheln der Bedingung β^3 eine Projektivität, in der sich solche Strahlen entsprechen, die nach demselben Strahl des g-Büschels gehen. Diese drei Büschel schneiden in die Ebene der Bedingung h_e drei projektive Punktreihen ein. In dieser Ebene gibt es dann drei Graden, welche drei entsprechende Punkte verbinden, d. h. welche drei Graden aus den drei Büscheln β treffen, die von demselben Strahl des g-Büschels getroffen werden. Wir haben also drei Leitgradenpaare mit den geforderten Eigenschaften.

Durch duale Betrachtungen ergeben sich auch bei den Bedingungen $g_s\ h_p\ \beta^3$ drei solcher Leitgradenpaare. Also:

Es lassen sich drei Strahlennetze finden, deren eine Leitgrade einem gegebenen Strahlenbüschel angehört, deren zweite Leitgrade in einer gegebenen Ebene liegt oder durch einen gegebenen Punkt geht und die in drei gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen.

7.

$g_s\ h\ \beta^4$.

Der Strahlenbüschel, auf den durch die Bedingung g_s der eine Leitstrahl g beschränkt ist, ruft zwischen den vier

Strahlenbüscheln der Bedingung β^4 eine Projektivität hervor, wenn man solche Strahlen einander zuordnet, die nach demselben Strahle des g-Büschels gehen. Der zweite Leitstrahl h muss dann ein Quadrupel von vier entsprechenden Strahlen treffen. Aus dem ersten Hilfssatz wissen wir nun, dass sämtliche Strahlen, die vier entsprechende Strahlen von vier projektiven Strahlenbüscheln treffen, eine Regelfläche achten Grades bilden. Zu dieser Regelfläche gehört in dem vorliegenden Falle ersichtlich der g-Büschel einfach. Der zweite Leitstrahl h ist also durch die Bedingungen $g_s\,\beta^4$ auf eine Regelfläche siebenten Grades beschränkt. Da sieben Graden dieser Fläche der beliebigen Grade der Bedingung h begegnen, ergeben sich sieben Leitgradenpaare mit den geforderten Eigenschaften. Also:

Es gibt sieben Strahlennetze, von deren Leitgraden die eine einem gegebenen Strahlenbüschel angehört, die andere eine gegebene Grade trifft und die in vier beliebig gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen.

Die in diesem Satze ausgesprochene Tatsache werden wir bei der Lösung späterer Probleme benutzen müssen. Für diese Anwendung des Satzes wird es sich jedoch als praktisch herausstellen, ihn in etwas veränderter Form auszusprechen. Gleichzeitig wollen wir für eine später oft gebrauchte Wortverbindung der Kürze halber einen besondern Ausdruck einführen.

Definition: Wenn mehrere Strahlenbüschel vorliegen und eine Grade g, dann soll eine Grade h, welche die Strahlenbüschel in denselben Strahlen trifft wie g, *die dem Strahl g bezüglich der gegebenen Strahlenbüschel zugeordnete Grade* genannt werden.

Unser Satz lässt sich dann so aussprechen:

Die einem Strahlenbüschel bezüglich vier andern beliebig gegebenen Strahlenbüscheln zugeordneten Strahlen bilden eine Regelfläche siebenten Grades.

Oder:

Die Graden im Raume, welche eine zugeordnete Grade bezüglich vier gegebener Strahlenbüschel besitzen, die einer

gegebenen Grade begegnet, bilden einen Komplex siebenten Grades[1]).

8.

$B\,\beta^4\,g_p\,(B\,\beta^4\,g_e)$[2]).

Da wegen der Bedingung B ein beliebig gegebener Strahl b dem gesuchten Strahlennetz angehören soll, so muss jeder der beiden Leitstrahlen die Grade b treffen. Der Leitstrahl g, der durch die Bedingung g_p schon auf den Strahlenbündel um einen beliebigen Punkt P beschränkt ist, wird also durch die Bedingung B noch weiter eingeschränkt, und zwar auf den Strahlenbüschel, der von P nach b geht. Der zweite Leitstrahl h muss der Grade b begegnen. Der vorliegende Fall scheint damit auf den vorigen (g_s h β^4) zurückgeführt zu sein. Der Umstand aber, dass diesmal die Grade, welcher der zweite Leitstrahl h begegnen soll, eine spezielle Lage zu dem g-Büschel hat, nämlich in der Trägerebene desselben liegt, erfordert eine gesonderte Betrachtung.

Die vier Strahlenbüschel der Bedingung β^4 nennen wir β_1, β_2, β_3, β_4. Der Strahlenbüschel (P, b) führt in diesen Büscheln in der schon mehrmals angegebenen Weise zu einer Projektivität. Alle Strahlen, die entsprechende Strahlen der drei Büschel β_1, β_2, β_3 treffen, bilden, wie schon früher erwähnt, eine Kongruenz [3, 3]. Die Grade b scheidet aus dieser Kongruenz eine Regelfläche sechsten Grades aus. Zu dieser Regelfläche gehört ersichtlich der ganze Strahlenbüschel (b, P). Dieser Strahlenbüschel vermindert den Grad der restierenden Regelfläche auf fünf. Wir sehen also, durch die Bedingungen $B\beta^3 g_p$ ist der zweite Leitstrahl h auf eine Regelfläche fünften Grades beschränkt. In dem

---

[1]) Ähnlich lautende Sätze finden sich bei Sturm, Liniengeometrie Bd. III. S. 88 und in dem Aufsatz von Sturm über das Problem der räumlichen Projektivität (Math. Ann. Bd. VI. S. 533). Es scheint ein innerer Zusammenhang mit diesen Sätzen zu bestehen, da auch in den Beweisen sich Analogien finden.

[2]) Mit dieser Aufgabe musste die systematische Anordnung der Probleme unterbrochen werden, da die Resultate dieser Nro. schon für die folgenden Aufgaben gebraucht werden.

vierten Strahlenbüschel β_4 definieren wir nun auf folgende Weise eine Korrespondenz. Einem Strahl x in β_4 entspricht infolge der Projektivität zwischen allen vier Strahlenbüscheln in β_1, β_2, β_3 je ein Strahl. Diese drei sowie x begegnen alle vier demselben Strahl des Büschels (b, P). Ausser diesem Strahl, der ja auch die Grade b trifft, haben b und jene drei Strahlen aus β_1, β_2, β_3 noch einen zweiten Treffstrahl, der seinerseits einem Strahl x′ in β_4 begegnet, den wir dem Ausgangsstrahl x zuordnen. Jedem x entspricht also durch diese Zuordnung ein einziger x′. Wieviele x entsprechen einem x′? Ein x′ wird wie jeder beliebige andere Strahl nach den obigen Erörterungen von fünf Graden getroffen, die der Grade b und einem Tripel entsprechender Graden aus β_1, β_2, β_3 begegnen, wobei der dem Büschel (P, b) angehörige Strahl nicht berücksichtigt ist. Jeder dieser fünf Strahlen gehört zu einem andern Tripel; denn würden zwei davon dasselbe Tripel treffen, dann würden ausser dem Strahl des Büschels (P, b) noch zwei Graden vorhanden sein, die jene vier Graden — b und das Tripel — treffen, was im allgemeinen nicht möglich ist. Den fünf Tripeln entsprechen somit in β_4 fünf Strahlen, die nach der obigen Zuordnung die dem x′ zugeordneten x sind. Die in β_4 hergestellte Verwandtschaft ist also eine Korrespondenz [5, 1]. Sie besitzt sechs Koinzidenzen.

Sehen wir zu, wie diese Koinzidenzen zustande kommen. Zu dem Zwecke betrachten wir einmal den Schnitt der Regelfläche fünften Grades mit der Ebene (P, b). Die Grade b ist doppelte Leitgrade der Regelfläche; denn da von jedem beliebigen Punkte des Raumes drei Graden ausgehen, die drei entsprechende Strahlen der Büschel β_1, β_2, β_3 treffen, so müssen von jedem Punkte der Grade b ausser einem Strahl des Büschels (P, b) noch zwei solcher Strahlen ausgehen, und zwei solche Graden gehören nach der Definition der Regelfläche fünften Grades an. Ausser in b muss also, da der Gesamtschnitt fünfter Ordnung ist, die Ebene (P, b) in einer Kurve dritter Ordnung geschnitten werden. X sei ein Punkt dieser Kurve. Von ihm, als

Punkt der Regelfläche, muss eine Grade der Regelfläche ausgehen. Da aber sämtliche Graden der Regelfläche der Grade b begegnen, muss diese Grade ganz in der Ebene (P, b) liegen. Ferner, da sie drei entsprechende Strahlen aus β_1, β_2, β_3 treffen muss, kann sie nur eine Grade des Büschels (P, b) sein. Die Restkurve dritter Ordnung kann demnach nur aus drei Strahlen des Büschels (P, b) bestehen. Die Regelfläche und der Strahlenbüschel (P, b) haben somit drei Graden gemeinsam. Diese drei Graden führen zu drei Koinzidenzen in der Korrespondenz. Denn jedem Strahl des Büschels gehört auf der Regelfläche ein einziger zu, nämlich derjenige, der dieselben drei Strahlen aus β_1, β_2, β_3 trifft. In unserm Falle haben sich diese beiden zugeordneten Strahlen vereinigt, und da sich in der Korrespondenz des Büschels β_4 solche entsprechen, die nach derartig zugeordneten Strahlen von der Regelfläche und dem Strahlenbüschel (P, b) gehen, so ist ersichtlich, dass die betrachteten drei Strahlen in (P, b) zu drei Koinzidenzen führen. Die übrigen drei Koinzidenzen können nur dadurch entstehen, dass ein Strahl des Büschels (P, b) die vier Büschel β_1, .. β_4 in solchen vier Strahlen trifft, dass deren zweite Treffgrade auch der Grade b begegnet, wobei jedoch beide Treffgraden nicht zusammenfallen, da die Fälle, in denen das eintritt, schon abgezogen sind. Diese drei Paare von Treffgraden führen jedes zu einem Strahlennetz mit den verlangten Eigenschaften, wenn wir das Gradenpaar als Leitstrahlenpaar auffassen.

Die drei andern Koinzidenzen würden dagegen nur zu vereinigten Leitgraden führen, die aber nur dann ein Strahlennetz bestimmen, wenn eine gewisse Projektivität erfüllt wird. Da in dem vorliegenden Falle keine derartige Projektivität auftritt, so bestimmen sie kein Strahlennetz, sondern einen speziellen linearen Komplex, ein Strahlengebüsch.

Wird noch berücksichtigt, dass man bei den Bedingungen $B\beta^4 g_6$ durch duale Betrachtungen zu demselben Ergebnis kommen muss, so ergibt sich der Satz:

Drei Strahlennetze sind möglich, die eine gegebene Grade enthalten, in vier gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen und von deren Leitgraden eine durch einen beliebigen Punkt geht oder in einer beliebigen Ebene liegt.

Oder in anderer Fassung:

Sämtliche Graden eines Strahlengebüsches, die eine solche zugeordnete Grade bezüglich vier gegebener Strahlenbüschel besitzen, welche demselben Gebüsche angehört, bilden eine Kongruenz [3, 3].

9.

$g_s\beta^5$.

Der Strahlenbüschel, auf den durch die Bedingung g_s der Leitstrahl g beschränkt ist, induziert in bekannter Weise eine Projektivität zwischen den fünf Büscheln der Bedingung β^5, die wir $\beta_1, .. \beta_5$ nennen wollen. Es fragt sich, wieviele Graden h möglich sind ausser dem g-Büschel, die fünf entsprechenden Strahlen begegnen. Die Erörterungen im Abschnitt II, 7 haben gezeigt, dass die Graden, welche vier entsprechende Strahlen aus den Büscheln β_1, β_2, β_3, β_4 treffen, eine Regelfläche siebenten Grades bilden. In dem fünften Strahlenbüschel β_5 konstruieren wir uns nun auf folgende Weise eine Korrespondenz. Einem Strahl x aus β_5 gehört infolge der Projektivität zwischen allen fünf Büscheln ein Quadrupel entsprechender Strahlen aus $\beta_1, .. \beta_4$ zu. Dieses besitzt ausser dem Strahle des g-Büschels noch einen zweiten Treffstrahl, welcher einem einzigen Strahl x′ aus β_5 begegnet. Ordnen wir diesen dem Ausgangsstrahl x zu, so entspricht also jedem x ein einziger x′. Andererseits wird, wie wir wissen, jeder x′ von sieben Graden getroffen, die je einem Quadrupel entsprechender Strahlen aus $\beta_1, .. \beta_4$ begegnen; und zwar wird jede dieser sieben Graden zu einem andern Quadrupel gehören; denn würden zwei dasselbe Quadrupel treffen, so würde dieses, da es ja ausserdem von einem Strahl des g-Büschels getroffen wird, im ganzen drei Treffgraden besitzen, was im allgemeinen aber nicht möglich ist. Zu den sieben Graden gehören demnach sieben

Quadrupel, von denen jedes einen entsprechenden Strahl im Büschel β_5 besitzt. Diese sieben Strahlen in β_5 sind ersichtlich die dem x′ entsprechenden x. Die Verwandtschaft im Büschel β_5 ist somit als eine Korrespondenz [7, 1] erkannt. Die acht Koinzidenzen derselben kommen wieder auf zwei Weisen zustande.

Wir untersuchen zu dem Zwecke den Schnitt der Ebene Γ des g-Büschels mit der Regelfläche siebenten Grades. Aus den Betrachtungen im Kapitel II, 8 wissen wir, dass eine Grade, die in der Ebene des g-Büschels liegt, nur von drei nicht dem g-Büschel angehörigen Graden getroffen wird, die einem Strahl des g-Büschels bezüglich $\beta_1, \ldots \beta_4$ zugeordnet sind. Alle diese zugeordneten Strahlen bilden unsere Regelfläche siebenten Grades. Da also auf jeder Grade der Ebene Γ nur drei Punkte liegen, welche von solchen Graden der Regelfläche herrühren, die nicht in Γ liegen, so liefern, die nicht in Γ liegenden Graden der Regelfläche nur eine Schnittkurve von der Ordnung drei. Da aber der Gesamtschnitt siebenter Ordnung sein muss, so müssen vier Graden der Regelfläche in Γ selbst liegen, und zwar können es, wie man leicht einsieht, nur vier Graden des g-Büschels sein. Die Regelfläche hat also vier Graden mit dem g-Büschel gemeinsam. Durch die nämlichen Überlegungen wie in Kapitel II, 8 findet man, dass diese vier Graden zu vier Koinzidenzen der Korrespondenz führen, die jedoch für unsern Zweck nicht brauchbar sind. Die übrigen vier Koinzidenzen können nur dadurch zustande kommen, dass ein Strahl aus dem g-Büschel vier solche Strahlen aus β_1, β_2, β_3, β_4 trifft, deren zweiter Treffstrahl im Büschel β_5 denselben Strahl trifft wie der Ausgangsstrahl des g-Büschels. Ein solcher Strahl g bildet aber mit dem zugehörigen zweiten Treffstrahl das Leitstrahlenpaar eines Strahlennetzes, welches den gestellten Bedingungen genügt. Also:

Es gibt vier Strahlennetze, die in fünf gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen und deren eine Leitgrade einem weiteren gegebenen Strahlenbüschel angehört.

Unser Ergebnis lässt sich auch so formulieren:

Die Graden, welche bezüglich fünf gegebener Strahlenbüschel einen zugeordneten besitzen, bilden einen Komplex vierten Grades.

10.

$g_e\, h_e\, \beta^4\, (g_p\, h_p\, \beta^4)$.

Die vier Büschel der Bedingung β^4 nennen wir β_1, β_2, β_3, β_4 und teilen sie in zwei Gruppen: β_1, β_2 und β_3, β_4. Die Ebene der Bedingung g_e soll Γ, die der Bedingung h_e H genannt werden. In dem Strahlenfelde von Γ wollen wir folgende Verwandtschaft herstellen. Eine Grade x in Γ trifft zwei Strahlen der Büschel β_1 und β_2, die durch ihre Spurpunkte in der Ebene H eine Grade bestimmen. Diese Grade in H trifft ihrerseits zwei Strahlen aus β_3 und β_4, deren Spurpunkte in Γ eine Grade x bestimmen, die wir der Ausgangsgrade x zuordnen wollen. Ersichtlich ist dadurch auch jedem x′ eine einzige Grade x zugeordnet; denn β_1, β_2 vertauschen dann nur mit β_3, β_4 ihre Plätze. Die Verwandtschaft ist also eine Cremonasche. Zu bestimmen ist noch der Grad derselben, d. h. es ist die Klasse der Kurve festzustellen, welche einem Strahlenbüschel entspricht. Durch den Strahlenbüschel, welchen wir x in Γ durchlaufen lassen, erhält man eine Projektivität zwischen den beiden Strahlenbüscheln β_1 und β_2, wenn man zwei Strahlen einander zuordnet, die demselben x begegnen. Dadurch werden auch die von β_1 und β_2 in die Ebene H eingeschnittenen Punktreihen projektiv. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte, die in dem vorliegenden Falle auch Treffgraden entsprechender Strahlen sind, umhüllen, wie bekannt, einen Kegelschnitt. Zwischen den beiden Punktreihen b_3 und b_4, die von β_3 und β_4 in der Ebene H eingeschnitten werden, konstruieren wir nun auf folgende Weise eine Korrespondenz. Einem Punkte B_3 von b_3 ordnen wir diejenigen beiden Punkte von b_4 zu, in denen die beiden von B_3 ausgehenden Tangenten des Kegelschnitts die b_4 treffen. Ersichtlich entsprechen dann auch jedem Punkte

von b_4 auf b_3 zwei Punkte, sodass zwischen den beiden Punktreihen auf b_3 und b_4 eine Korrespondenz [2, 2] entsteht. Diese Korrespondenz überträgt sich durch die beiden Büschel β_3 und β_4 auf die beiden von β_3 und β_4 in Γ eingeschnittenen Punktreihen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser beiden sind, wie man ohne weiteres übersieht, die dem Ausgangsstrahlenbüschel der x entsprechenden x'. Sie umhüllen eine Kurve vierter Klasse; denn die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier graden Punktreihen, die durch eine Korrespondenz [m, n] verbunden sind, umhüllen eine Kurve von der Klasse $m + n$. Die in dem Gradenfeld der Ebene Γ konstruierte Cremonasche Verwandtschaft ist also vom Grade vier, die $4 + 2 = 6$ Koinzidenzgraden besitzt[1]). Unter diesen Koinzidenzen befindet sich ersichtlich die Schnittgrade der beiden Ebenen Γ und H. Was gilt von den fünf übrigen Koinzidenzen? Es sind Graden in Γ, die die Büschel $\beta_1 \cdots \beta_4$ in vier solchen Graden treffen, die ihrerseits vier Punkte in H einschneiden, die in grader Linie liegen. Diese zuletzt erwähnte grade Linie in H sowie die Koinzidenzgrade in Γ bilden also das Leitstrahlenpaar eines Strahlennetzes mit den geforderten Eigenschaften. Die Schnittgrade von Γ und H gehört zwar auch zu den Koinzidenzen, aber sie führt zu keinem Strahlennetz; denn die ihm bezüglich $\beta_1, \ldots \beta_4$ zugeordnete Grade braucht keineswegs in H zu liegen.

Bei den Bedingungen $g_p\, h_p\, \beta^4$ lassen sich dieselben Betrachtungen vollkommen dual durchführen. Also:

Es lassen sich fünf Strahlennetze finden, die in vier beliebige Strahlennetze je einen Strahl schicken und von deren Leitstrahlen jeder in einer gegebenen Ebene liegt oder durch einen gegebenen Punkt geht.

15.

$$g_e\, h_p\, \beta^4.$$

Die Betrachtungen sind ganz analog zu den vorigen. Es gelingt wieder in der Ebene der Bedingung g_e eine Cremo-

[1]) Vergl. Luigi Cremona, Sulle transformazione geometriche delle figure piane; Memorie dell' Accademia delle scienze dell' istituto di Bologna Serie II, Bd. 5. Seite 31–33.

nasche Verwandtschaft vierten Grades herzustellen — diesmal durch Vermittlung des Strahlenbündels, welches den Punkt der Bedingung h_p zum Scheitel hat. Da in dem vorliegenden Falle die Ebene der Bedingung g_e und jener Strahlenbündel keinen Strahl gemeinsam haben, so führen alle sechs Koinzidenzen zu einem Strahlennetz mit den verlangten Eigenschaften. Also:

Es gibt sechs Strahlennetze, die in vier beliebigen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen und von deren Leitstrahlen der eine in einer gegebenen Ebene liegt, der andere durch einen gegebenen Punkt geht.

12.

$g_e\ h\ \beta^5\ (g_p\ h\ \beta^5)$.

Aus den Betrachtungen in dem Abschnitt II, 9 wissen wir, dass alle Graden, die eine zugeordnete bezüglich der fünf gegebenen Strahlenbüschel besitzen, einen Komplex vierten Grades bilden. In der beliebigen Ebene Γ der Bedingung g_e bilden also sämtliche Graden mit dieser Eigenschaft eine Kurve vierter Klasse. Ferner wissen wir aus II, 7, dass alle Graden, deren zugeordnete Graden bezüglich der Büschel β_1, β_2, β_3, β_4 eine beliebig gegebene Grade, nämlich die Grade l der Bedingung h, treffen, eine Komplex siebenten Grades bilden. Von diesem Komplex enthält die Ebene Γ eine Kurve siebenter Klasse. Diese und die oben gefundene Kurve vierter Klasse haben $4 \cdot 7 = 28$ Tangenten gemeinsam.

Jede dieser 28 Graden besitzt also einen zugeordneten Strahl bezüglich der fünf Büschel $\beta_1, .. \beta_5$ und einen zugeordneten bezüglich der vier Büschel $\beta_1, .. \beta_4$, der die Grade l trifft. Beide zugeordnete Strahlen derselben Graden g müssen durch dieselben vier Strahlen aus $\beta_1, .. \beta_4$ gehen wie g. Da aber diese vier Strahlen im allgemeinen ausser g nur noch einen zweiten Treffstrahl besitzen, so müssen die beiden dem g zugeordneten Strahlen identisch sein. Tritt dieser allgemeine Fall ein, so muss der einzige zugeordnete Strahl des g die fünf Büschel $\beta_1, .. \beta_5$ in denselben Strahlen wie g treffen und ausserdem noch durch l gehen, sodass also in

diesem Falle g und die zugeordnete Grade das Leitstrahlenpaar eines Strahlennetzes mit den geforderten Eigenschaften bilden.

Der Schluss auf die Identität der beiden zugeordneten Graden eines g ist aber keineswegs erlaubt, wenn wir nachweisen können, dass die betreffende Grade g die Büschel $\beta_1, .. \beta_4$ in 4 solchen Graden trifft, die mehr als eine zweite Treffgrade besitzen. Wir haben also zu untersuchen, wieviele von den 28 Graden die angegebene Eigenschaft besitzen. Nach dem Hilfssatz in I, 3 gibt es in Γ drei Graden, die $\beta_1, .. \beta_4$ in vier Graden einer Regelschar treffen; diese drei besitzen demnach unendlich viele zweite Treffgraden. Eine von diesen dreien heisse m. Wir müssen noch zeigen, dass m zu jenen 28 Graden gehört, die den beiden Kurven in Γ gemeinsam sind. Zu den Tangenten der Kurve vierter Klasse gehört m; denn sie trifft ja $\beta_1, .. \beta_4$ in vier Graden einer Regelschar, deren Leitschar muss natürlich den von m aus β_5 ausgesonderten Strahl zweimal treffen, ausser mit m also noch mit einem zweiten Strahl. m gehört demnach einfach der Kurve vierter Klasse an.

Die bewusste Leitschar trifft ferner die Grade l der Bedingung h zweimal. Es gibt also zwei Graden, die dieselben vier Strahlen aus $\beta_1, .. \beta_4$ treffen wie m und die der Grade l begegnen. Als Tangente der Kurve siebenter Klasse rechnet demnach m doppelt. Alle drei Graden zählen somit für $3 . 2 = 6$ gemeinsame Tangenten der beiden Kurven, für die obiger Schluss nicht gilt.

Betrachten wir nun die Schnittlinien der vier Büschel $\beta_1, .. \beta_4$ mit der Ebene Γ. Wir wollen etwa $(\Gamma, \beta_4) = b_4$ ins Auge fassen. b_4 trifft sämtliche Strahlen aus β_4 und je einen Strahl aus β_1, β_2, β_3. Sämtliche Graden der durch die drei Strahlen aus β_1, β_2, β_3 als Leitstrahlen bestimmten Regelschar treffen also auch die nämlichen vier Strahlen aus $\beta_1, .. \beta_4$ wie b_4.

Falls nun b_4 zu den gemeinsamen Tangenten der beiden Kurven in Γ gehört, so würde obiger Schluss auch für sie nicht berechtigt sein. Tatsächlich ist nun b_4 für die Kurve

vierter Klasse einfache und für die Kurve siebenter Klasse doppelte Tangente, wie man erkennt, wenn man ebenso wie vorhin mit m verfährt. b_4 zählt also für zwei gemeinsame Tangenten. Die vier Schnittgraden von $\beta_1, . \beta_4$ mit Γ liefern somit acht weitere gemeinsame Tangenten der beiden Kurven, für die der bewusste Schluss nicht gilt.

Da auf andere Weise keine Graden in Γ möglich sind, die mehr als eine zugeordnete bezüglich $\beta_1, . . \beta_4$ besitzen, so ist für den Rest der gemeinsamen Tangente $(28 - 6 - 8 = 14)$ der Schluss erlaubt, sodass sich also 14 Leitstrahlenpaare mit den geforderten Eigenschaften ergeben.

Aus dualen Gründen lassen auch die Bedingungen g_p h β^5 14 Leitstrahlenpaare zu. Demnach:

Es sind 14 Strahlennetze möglich, die in fünf gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen und von deren Leitstrahlen der eine einer gegebenen Grade begegnet, der andere in einer gegebenen Ebene liegt oder durch einen gegebenen Punkt geht.

Dieselbe Tatsache lässt sich auch so aussprechen:

Die Graden, welche einen zugeordneten Strahl bezüglich fünf gegebener Strahlenbüschel besitzen, der einer gegebenen Grade begegnet, bilden eine Kongruenz [14,14].

13.

$g_e \beta^6$ $(g_p \beta^6)$.

Zu ermitteln ist die Anzahl der Graden in der beliebigen Ebene Γ der Bedingung g_e, die einen zugeordneten Strahl bezüglich der sechs Büschel $\beta_1, \ldots \beta_6$ haben. Die Strahlen in Γ, welche bezüglich der fünf Büschel $\beta_1, . . \beta_5$ einen zugeordneten besitzen, bilden eine Kurve vierter Klasse (vergl. II, 9). Eine zweite Kurve vierter Klasse wird in Γ von den Graden gebildet, die eine zugeordnete bezüglich der Büschel β_1, β_2, β_3, β_4, β_6 haben.

Unter den 16 gemeinsamen Tangenten beider Kurven befinden sich erstens drei Graden der Kongruenz [3,3], welche nach I, 3 von denjenigen Graden gebildet wird, die $\beta_1, . \beta_4$ in vier Graden einer Regelschar treffen. Zweitens zählen

auch die vier Graden, welche die Ebenen der Büschel $\beta_1 .. \beta_4$ in Γ einschneiden, zu diesen gemeinsamen Tangenten. Und zwar liegen alle sieben Graden auf beiden Kurven vierter Klasse einfach (zum Beweise vergl. die entsprechende Stelle in II, 12) und zählen demnach für sieben gemeinsame Elemente.

Von den $16 - 7 = 9$ weiteren gemeinsamen Graden gilt nun folgendes: die vier von ihnen getroffenen Strahlen aus $\beta_1 .. \beta_4$ besitzen nur einen einzigen zweiten Treffstrahl, und dieser muss, weil jene neun den beiden Kurven vierter Klasse gemeinsam sind, auch denjenigen Strahlen aus β_5 und β_6 begegnen, die von dem zugehörigen unter den neun Strahlen in diesen beiden Büscheln getroffen werden.

Jede dieser neun Graden zusammen mit der zugehörigen zweiten Treffgraden bildet also ein Leitstrahlenpaar mit den gewünschten Eigenschaften.

Auch die dualen Bedingungen $g_p \beta^6$ werden durch neun Leitstrahlenpaare erfüllt. Also:

Es gibt neun Strahlennetze, deren eine Leitgrade in einer beliebig gegebenen Ebene liegt oder durch einen beliebigen Punkt geht und die in sechs gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen.

Zweite Fassung:

Die Strahlen, welche bezüglich sechs gegebener Strahlenbüschel einen zugeordneten besitzen, bilden eine Kongruenz [9,9].

14.

$g\, h\, \beta^6$.

Die beiden Graden der Bedingungen g und h wollen wir $\bar{g}$ und $\bar{h}$ nennen. Das Problem lässt sich dann auch so formulieren: wieviele Graden durch g gibt es, die eine zugeordnete Grade bezüglich der sechs Büschel der Bedingung β^6 besitzen, welche der Grade $\bar{h}$ begegnet. Aufgrund des Satzes in II, 12 wissen wir, alle Graden im Raume, die eine zugeordnete Grade bezüglich der fünf Büschel $\beta_1 .. \beta_5$ besitzen, welche $\bar{h}$ trifft, bilden eine Kongruenz [14,14]. Ferner bilden alle Graden des Raumes, die eine zugeordnete

Grade bezüglich der fünf Büschel $\beta_1, . \beta_4, \beta_6$ besitzen, einen Komplex vierten Grades (vergl. II, 9). Die Grade $\bar{g}$ scheidet aus diesem Komplex eine Kongruenz [4,4]. Diese, sowie die obige Kongruenz [14,14] besitzen nach dem ersten Halphenschen Satze[1]) $4 \cdot 14 + 4 \cdot 14 = 112$ gemeinsame Graden.

Diejenigen von diesen 112 Graden, welche die Büschel $\beta_1, . \beta_4$ in vier Graden treffen, die mehr als eine zweite Treffgrade besitzen, werden sich wieder als unbrauchbar erweisen. Wir untersuchen daher zunächst, wieviele von den 112 Graden der Kongruenz [3,3] angehören, die nach dem dritten Hilfssatz (I, 3) mit den Büscheln $\beta_1, . \beta_4$ verbunden ist. Die Graden, welche eine bezüglich der vier Büschel β_2, β_3, β_4, β_5 zugeordnete Grade besitzen, die der Grade $\bar{h}$ begegnet, bilden einen Komplex siebenten Grades (II, 7). Ferner ist ersichtlich, dass alle Graden durch $\bar{g}$ eine ihnen zugeordnete bezüglich der Büschel β_2, β_3, β_4, β_6 besitzen. Dieses Strahlengebüsche mit $\bar{g}$ als Achse und jener Komplex siebenten Grades schneiden sich in einer Kongruenz [7,7]; und diese hat wiederum mit der oben erwähnten Kongruenz [3,3] $3.7 + 3.7 = 42$ Graden gemeinsam. Es wird sich zeigen, dass ein Teil von diesen 42 Graden den drei Kongruenzen [14,14], [4,4] und [3,3] gemeinsam ist, ein Teil aber nicht.

Die durch die Bevorzugung der drei Büschel β_2, β_3, β_4 unter den vier Büscheln $\beta_1, . \beta_4$ entstandene Unsymmetrie veranlasst uns, einmal zu untersuchen, ob von den 42 Graden einige in den Ebenen von β_2, β_3, β_4 liegen. Betrachten wir etwa die Ebene B_2 von β_2. Von der Kongruenz [3,3] liegen in ihr unendlich viele Graden, die einen Kegelschnitt umhüllen (vergl. die erste Ergänzung des dritten Hilfssatzes S. 14). Sämtliche Tangenten dieses Kegelschnittes, wie überhaupt alle Graden in B_2, gehören dem Komplex siebenten Grades an; denn da sie ja allen Graden des Büschels β_2 begegnen, so ist es klar, dass sie eine zugeordnete bezüglich β_2, β_3, β_4, β_5 besitzen, die der $\bar{h}$ begegnet. Es genügt nämlich, dass eine zugeordnete Grade bezüglich β_3, β_4, β_5 vorhanden

[1]) Sturm, Liniengeometrie I. S. 42.

ist, die $\bar{h}$ trifft; die Eigenschaft bezüglich des Büschels β_2 tritt ersichtlich immer ein. Dem Strahlengebüsche mit der Achse $\bar{g}$ gehört in B_2 das Strahlenbüschel um den Spurpunkt von $\bar{g}$ an. Da dieses Strahlenbüschel mit dem Tangentenbüschel des Kegelschnittes zwei Graden gemeinsam hat, so haben wir in B_2 zwei Graden, die dem Strahlengebüsch, dem Komplex siebenten Grades und der Kongruenz [3,3] angehören. Es fragt sich, ob wir bei diesen die Folgerung ziehen können, dass sie dann auch den bewussten drei Kongruenzen angehören. Stellt man dieselben Erwägungen mit der Ebene B_1 des Büschels β_1 an, dann finden sich in ihr keine solche zwei Geraden. Schon dieser Umstand dass B_1 und B_2, die doch im übrigen in dem Problem eine symmetrische Stellung einnehmen, hier verschiedenes Verhalten zeigen, lässt uns vermuten, dass obige Frage mit Nein zu beantworten ist. Weil jede der beiden Graden in B_2 der Kongruenz [3,3] angehört, gibt es in dem Büschel β_2 für jede einen bestimmten Strahl b_2, der mit den drei aus β_1, β_3, β_4 getroffenen Strahlen b_1, b_3, b_4 auf einer Regelschar liegt. Dem Komplex siebenten Grades gehört jeder von beiden an, weil ja nur nötig ist, dass es einen zweiten Strahl m gibt, der denselben Strahlen aus β_3, β_4, β_5 und ausserdem der Grade $\bar{h}$ begegnet; welchen Strahl in β_2 dieser zweite Strahl m trifft, ist gleichgiltig, im allgemeinen wird es nicht der eben erwähnte b_2 sein. Der Strahl m wird also im allgemeinen nicht Leitstrahl der Regelschar sein, die durch b_2 b_3, b_4 bestimmt ist; demnach können wir nicht schliessen, dass auch b_1 von m getroffen wird. Die beiden Graden in B_2 sind mithin zwar den beiden Komplexen und der Kongruenz gemeinsam, aber nicht den drei Kongruenzen. Als gemeinsamer Strahl der beiden Komplexe und der Kongruenz [3,3] zählt jeder von beiden doppelt; denn der Kongruenz [3,3] gehört jeder einfach an (vergl. S. 14), dem Strahlengebüsche ersichtlich auch einfach und dem Komplex siebenten Grades doppelt, denn es gibt zwei Graden, die denselben drei Strahlen aus β_3, β_4, β_5 und der Grade $\bar{h}$ begegnen. Ebenso gibt es natürlich in den Ebenen von β_3

und β_4 je zwei Strahlen, für die genau dasselbe gilt. Duale Erwägungen zeigen, dass es auch in jedem der drei Strahlenbündel um die Scheitel von β_2, β_3, β_4 je zwei Graden mit denselben Eigenschaften gibt. Wir haben somit $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ gemeinsame Graden der beiden Komplexe und der Kongruenz [3,3], bei denen wir nicht schliessen können, dass sie den drei Kongruenzen gemeinsam sind. Für den Rest von den 24 Graden, das sind 18 Graden, ist aber dieser Schluss wohl berechtigt, da diese 18 alle vier Büschel $\beta_1, .. \beta_4$ nur in je einem Strahl treffen können.

Es sei nämlich l eine von diesen 18 Graden. Da sie dem Komplex siebenten Grades angehört, muss sie eine zugeordnete bezüglich der Büschel $\beta_2, \ldots \beta_5$ besitzen, welche $\bar{h}$ trifft. Da sie nun aber wegen ihrer Zugehörigkeit zur Kongruenz [3,3] die Büschel $\beta_1, .. \beta_4$ in vier Graden einer Regelschar trifft, muss jede Grade, die den drei von l aus β_2, β_3, β_4 ausgesonderten Strahlen begegnet, auch die aus β_1 von l ausgeschiedene Grade treffen. Es ergibt sich daraus, dass l der oben definierten Kongruenz [14,14] angehört. Ferner muss diejenige zweite Grade, welche l bezüglich β_2, β_3, β_4, β_6 zugeordnet ist, auch der von l in β_1 getroffenen Grade begegnen, weil l der Kongruenz [3,3] angehört. Die Grade l ist demnach auch eine Grade der Kongruenz [4,4]. Wir wissen damit also, dass unter den 112 Graden, die den beiden Kongruenzen [14,14] und [4,4] gemeinsam sind, sich 18 befinden, die auch der Kongruenz [3,3] angehören.

Unter den 112 Graden befinden ausser diesen 18 sich noch weitere Graden, die für unsern Zweck ebenfalls unbrauchbar sind. Fassen wir die Ebene eines der vier Büschel $\beta_1, .. \beta_4$ ins Auge, etwa B_1. Da B_1 bezüglich der Bedingungen, welche den Graden des Strahlengebüsches und des Komplexes siebenten Grades auferlegt sind, eine allgemeine Lage besitzt, so liegen von den beiden Komplexen in B_1 ein Strahlenbüschel bezw. eine Kurve siebenter Klasse, die sieben Graden gemeinsam haben. Da diese sieben Graden ja sämtliche Graden des Büschels β_1 treffen, so sind sie nicht nur gemeinsame Strahlen der beiden Komplexe, sondern sie ge-

hören auch den beiden Kongruenzen [14,14] und [4,4] an, wie man unmittelbar erkennt, wenn man sich noch einmal die Bedingungen vergegenwärtigt, denen die beiden Komplexe und die beiden Kongruenzen unterworfen sind. Die vier Ebenen von $\beta_1, .. \beta_4$ liefern uns also $4.7 = 28$ Graden von den 112. Auch die vier Strahlenbündel um die Scheitelpunkte dieser Büschel führen zu 28 Graden derselben Eigenschaft. Unter den 112 Graden gibt es demnach $2.28 + 18 = 74$ Graden, die $\beta_1, .. \beta_4$ in vier solchen Graden treffen, die mehr als eine zweite Treffgrade zulassen.

n sei eine von den $112 - 74 = 38$ übrigen Graden. Die vier Büschel $\beta_1, .. \beta_4$ werden von n in vier solchen Graden getroffen, dass nur eine einzige zweite Treffgrade o dieser vier möglich ist; denn die Graden, bei denen das nicht der Fall ist, sind schon abgezogen. Weil n der Kongruenz [4,4] angehört, geht es durch $\bar{g}$, und o muss dann durch denselben Strahl von β_6 gehen wie n. Ausserdem muss o, weil n der Kongruenz [14,14] angehört, auch der Grade $\bar{h}$ sowie demselben Strahl von β_5 wie n begegnen. Jeder solche Strahl n mit dem zugehörigen o hat mithin alle Eigenschaften, welche das Leitstrahlenpaar des von uns gesuchten Strahlennetzes haben soll.

Also gilt der Satz, da 38 solche Graden n vorhanden sind:

Es gibt 38 Strahlennetze, von deren beiden Leitstrahlen jeder einer beliebigen Grade begegnet und die in sechs gegebene Strahlenbüschel je einen Strahl senden.

In anderer Fassung:

Die Graden, welche bezüglich sechs gegebener Strahlenbüschel eine zugeordnete besitzen, die einer gegebenen Grade begegnet, bilden eine Regelfläche vom 38ten Grade.

15.

$g\,\beta^7$.

Ist g die Grade der Bedingung g, dann handelt es sich um die Anzahl der Graden, welche $\bar{g}$ treffen und bezüglich

der sieben Strahlenbüschel $\beta_1, \ldots \beta_7$ eine zugeordnete Grade besitzen.

Nach dem Satz in II, 13 bilden sämtliche Graden, welche eine zugeordnete bezüglich der sechs Büschel $\beta_1, .. \beta_6$ haben, eine Kongruenz [9,9]. Ferner folgt aus dem Satz in II, 9, dass alle Graden, welche $\bar{g}$ treffen und bezüglich der fünf Büschel β_1, β_2, β_3, β_4, β_7 eine zugeordnete Grade besitzen, eine Kongruenz [4,4] bilden. Beide Kongruenzen haben $4.9 + 4.9 = 72$ Graden gemeinsam. Diejenigen von diesen 72, welche bezüglich der vier Büschel $\beta_1, .. \beta_4$ nur eine einzige zugeordnete Grade besitzen, sind dann solche Graden, wie wir sie suchen.

Im allgemeinen besitzt jede Grade bezüglich $\beta_1, .. \beta_4$ nur eine zugeordnete; eine Ausnahme davon machen, wie wir wissen, nur die Graden der vier Strahlenfelder in den Ebenen von $\beta_1, .. \beta_4$, der vier Strahlenbündel um die Scheitel von $\beta_1, .. \beta_4$ und die Graden der nach dem dritten Hilfssatze mit $\beta_1, .. \beta_4$ verbundenen Kongruenz [3,3].

Wir haben also zunächst festzustellen, wieviele von den 72 Graden in der Ebene eines der vier Strahlenbüschel liegen, und zwar wollen wir die Ebene B_1 von β_1 ins Auge fassen. Die Strahlen in B_1, die bezüglich β_2, $\beta_3, .. \beta_6$ eine zugeordnete besitzen, gehören der Kongruenz [9,9] an, da ja eine Grade in B_1 sämtlichen Strahlen von β_1 begegnet, sodass jede Grade, die bezüglich $\beta_2, .. \beta_6$ eine zugeordnete besitzt, auch dieselbe zugeordnete bezüglich $\beta_1, \ldots \beta_6$ haben muss. Nach dem Satz in II, 9 bilden die Graden mit dieser Eigenschaft in der Ebene B_1, die ja hinsichtlich $\beta_2, .. \beta_6$ beliebig gelegen ist, eine Kurve vierter Klasse. Andererseits sieht man, dass jede Grade in B_1 bezüglich $\beta_1, .. \beta_4, \beta_7$ eine zugeordnete besitzen muss. Der Strahlenbüschel in B_1 um den Spurpunkt von $\bar{g}$ gehört also ganz der oben erwähnten Kongruenz [4,4] an. Da dieser Strahlenbüschel vier Graden der Kurve vierter Klasse enthält, so liegen in B_1 vier Graden, welche den beiden Kongruenzen [9,9] und [4,4] gemeinsam sind, d. h. vier von jenen 72 Graden. Aus

denselben Gründen müssen auch in B_2, B_3 und B_4 und aus dualen Gründen auch in den Strahlenbündeln um die Scheitel von $\beta_1, .. \beta_4$ je vier solcher Graden liegen. Es haben sich demnach bis jetzt $4.8 = 32$ Graden von den 72 als unbrauchbar erwiesen.

Wieviele von den 72 Graden gehören ferner der Kongruenz [3,3] des dritten Hilfssatzes an? Die Graden, welche bezüglich der fünf Büschel $\beta_2, .. \beta_6$ eine zugeordnete Grade besitzen, bilden einen Komplex vierten Grades (II,9). Sämtliche Graden durch $\bar{g}$ besitzen ferner eine zugeordnete bezüglich der vier Büschel β_2, β_3, β_4, β_7. Dieses Strahlengebüsche, der Komplex vierten Grades und die Kongruenz [3,3] haben $3.4 + 3.4 = 24$ Graden gemeinsam [1]). Wegen der Zugehörigkeit dieser Graden zu der Kongruenz [3,3] sind dieselben auch den beiden Kongruenzen [9,9] und [4,4] gemeinsam [2]), wenigstens im allgemeinen, denn diejenigen von den 24 Graden, die in einer Ebene der drei Büschel β_2, β_3, β_4 oder in einem Strahlenbündel um deren Scheitel liegen, nehmen auch hier eine Sonderstellung ein. Betrachten wir etwa die Ebene B_2 von β_2. In ihr liegt, wie wir wissen, von der Kongruenz [3,3] eine Kurve zweiter Klasse und von dem Strahlengebüsch der Strahlenbüschel um den Spurpunkt von $\bar{g}$, und dem Komplex vierten Grades der Strahlen, die eine zugeordnete bezüglich $\beta_2, .. \beta_6$ besitzen, gehört das ganze Strahlenfeld an, weil jede Grade desselben β_2 in sämtlichen Strahlen trifft. Da der Strahlenbüschel und die Kurve zweiter Klasse zwei Graden gemeinsam haben, so liegen in B_2 zwei von den 24 Graden, wobei man sich aber vorher noch klar machen muss, dass beide sowohl jedem der beiden Komplexe als auch der Kongruenz [3,3] nur einfach angehören, was jedoch keine Schwierigkeiten macht. Die Schlüsse, welche an der analogen Stelle in II, 14 (S. 32. 33), gezogen worden sind, sind auch hier mit Änderungen, die

[1]) vergl. Sturm, Liniengeometrie I, S. 42, 43.

[2]) Der Beweis ist vollkommen analog zu dem an der entsprechenden Stelle in II, 14 S. 33.

auf der Hand liegen, zulässig. Da wir nun auch in den Ebenen von β_3 und β_4, sowie in den drei Strahlenbündeln je zu zwei eben solchen Strahlen kommen, so dürfen wir bei $2.6 = 12$ Graden von den 24 nicht schliessen, dass sie sich unter den 72 gemeinsamen Graden der beiden Kongruenzen [9,9] und [4,4] befinden. Für die übrigen 12 Graden ist der Schluss, dass sie zu den 72 gehören, berechtigt. Von den 72 Graden gehören also 12 der Kongruenz [3,3] an.

Als brauchbar für unsern Zweck bleiben also nur $72 - (32 + 12) = 28$ Graden übrig. Diese besitzen nur einen einzigen zugeordneten Strahl bezüglich $\beta_1, .. \beta_4$. Weil sie der Kongruenz [4,4] angehören, treffen sie die Grade $\bar{g}$, und der einzige zugeordnete Strahl muss in β_7 dieselbe Grade treffen, wie die von den 28 Graden, der er zugeordnet ist. Wegen der Zugehörigkeit der 28 Graden zu der Kongruenz [9,9] muss der zugeordnete Strahl auch dieselbe Eigenschaft bezüglich β_5 und β_6 haben.

Jede von den 28 Graden liefert also mit ihrer zugeordneten Grade das Leitstrahlenpaar eines Strahlennetzes mit den verlangten Eigenschaften.

Es gibt 28 Strahlennetze, die in sieben gegebene Strahlenbüschel je einen Strahl schicken und deren eine Leitgrade einer gegebenen Grade begegnet.

Zweite Fassung:

Alle Graden, welche eine zugeordnete Grade bezüglich sieben gegebener Strahlenbüschel besitzen, bilden eine Regelfläche 28ten Grades.

16.

β^8.

Alle Graden, welche bezüglich der sieben Strahlenbüschel $\beta_1, \ldots . \beta_7$ eine zugeordnete Grade besitzen, bilden eine Regelfläche 28ten Grades, wie sich bei der vorigen Aufgabe ergeben hat. Ferner bilden diejenigen Graden, die bezüglich der fünf Büschel $\beta_1, .. \beta_4, \beta_8$ eine zugeordnete besitzen, einen Komplex vierten Grades (II, 9). Die Regel-

fläche und der Komplex haben nach dem zweiten Halphenschen Satze[1]) 4.28 = 112 Graden gemeinsam.

Zu erörtern ist wiederum, wieviele von diesen bezüglich der vier Büschel $\beta_1,..\beta_4$ mehr als eine zugeordnete Grade besitzen. Zunächst stellen wir die Anzahl derjenigen von den 112 Graden fest, die in einer der Ebenen der Büschel $\beta_1,..\beta_4$ liegen oder durch einen von ihren Scheiteln gehen. Wir betrachten beispielsweise die Ebene B_1 von β_1. Da B_1 bezüglich $\beta_2,..\beta_7$ allgemein gelegen ist, so ergibt sich aus II, 13, dass es in B_1 neun Graden gibt, die eine zugeordnete bezüglich $\beta_2,...\beta_7$ haben. Da nun ein Strahl in B_1 sämtliche Strahlen von β_1 trifft, gehören diese neun Graden auch der oben definierten Regelfläche an. Dass sie ferner dem Komplex vierten Grades angehören, ist ebenso leicht zu erkennen. Sie gehören also zu den 112 Graden. Da für die drei übrigen Ebenen und für die vier Strahlenbündel sich gleichfalls neun derartige Graden nachweisen lassen, so haben wir im ganzen 8.9 = 72 Graden unter den 112, wie wir sie zunächst suchen wollten.

Es bleibt noch die Zahl derjenigen von den 112 Graden festzustellen, die der Kongruenz [3,3] angehören, welche gemäss des dritten Hilfssatzes mit den vier Büscheln $\beta_1,..\beta_4$ verbunden ist. Diejenigen Graden, welche bezüglich der sechs Büschel $\beta_2,...\beta_7$ eine zugeordnete Grade besitzen, bilden eine Kongruenz [9,9] (II, 13). Nach dem ersten Halphenschen Satze hat diese Kongruenz mit der Kongruenz [3,3] 3.9 + 3.9 = 54 Graden gemeinsam. Für diejenigen von diesen 54 Graden, die weder in einer Ebene von β_2, β_3 oder β_4 liegen oder durch einen Scheitel von diesen drei Büscheln gehen, lässt sich zeigen (vergl. S. 33), dass sie sich unter den gemeinsamen Graden der Regelfläche 28ten Grades und des Komplexes vierten Grades befinden.

Wir müssen daher die Anzahl der Graden feststellen, die diese Ausnahmestellung einnehmen. Wieviele von den 54 liegen etwa in der Ebene B_2 von β_2? In B_2 liegen von

[1]) Sturm, Liniengeometrie I. S. 44.

der Kongruenz [3,3] unendlich viele Graden, die einen Kegelschnitt umhüllen (dritter Hilfssatz). Von der Kongruenz [9,9] liegt in B_2 eine Kurve vierter Klasse; denn für eine Grade in B_2 genügt es, um zur Kongruenz [9,9] zu gehören, wenn sie eine zugeordnete bezüglich der fünf Büschel $\beta_3, .. \beta_7$ besitzt (wegen der Klasse vergleiche man den Satz in II, 9).

Diese Kurve vierter Klasse und der Tangentenbüschel des Kegelschnittes haben $2.4 = 8$ Graden gemein, das sind die Graden von jenen 54, welche in B_2 liegen. Ebenso enthalten die Ebenen von β_3 und β_4 je acht solcher Graden. Alle drei Ebenen aber enthalten nicht 24 solcher Graden; denn wie noch gezeigt werden muss, gehören in jeder der Ebenen die beiden Schnittgraden mit den beiden andern Ebenen zu jenen acht Graden. Diese Schnittgraden zweier Ebenen, deren es bei den drei Ebenen von β_2, β_3, β_4 drei gibt, sind also bei den 24 Graden doppelt gezählt. Die drei Ebenen enthalten demnach tatsächlich nur 21 von den bewussten Graden.

Nachzuholen ist noch der Beweis dafür, dass sich eine Schnittgrade zweier von den drei Ebenen, etwa (B_2, B_3), unter den 8 Graden in B_2 befindet, also den beiden Kongruenzen [9,9] und [3,3] angehört. Da (B_2, B_3) sämtlichen Strahlen der Büschel β_2 und β_3 begegnet und die vier von (B_2, B_3) in β_4, β_5, β_6, β_7 getroffenen Strahlen selbstverständlich noch einen zweiten Trefistrahl besitzen, so gehört ersichtlich (B_2, B_3) zu den Graden, die bezüglich $\beta_2, \ldots \beta_7$ eine zugeordnete Grade besitzen, diese Grade gehört also zu der Kongruenz [9,9]. Dass (B_2, B_3) auch der Kongruenz [3,3] angehört, ist bereits in der zweiten Ergänzung zum dritten Hilfssatz bewiesen (S. 15).

Aus dualen Gründen folgt, dass sich auch in den drei Strahlenbündeln um die Scheitel von β_2, β_3, β_4 zusammen 21 Graden befinden, die zu jenen 54 Graden gehören.

Wir sind also nur berechtigt bei $54 - 2.21 = 12$ Graden zu schliessen, dass sie sich unter den anfangs er-

wähnten 112 Graden befinden und der Kongruenz [3,3] angehören.

Im ganzen gibt es demnach $72 + 12 = 84$ Graden unter den 112, die mehr als eine zugeordnete Grade bezüglich der Büschel $\beta_1, .. \beta_4$ besitzen.

Von den $112 - 84 = 18$ übrigen Graden wissen wir nun folgendes: sie besitzen nur eine einzige zugeordnete Grade bezüglich $\beta_1, .. \beta_4$; diese muss, weil die 28 Graden der Regelfläche 28. Grades angehören, in β_5, β_6, β_7 dieselben Strahlen treffen wie der Ausgangsstrahl, und wegen der Zugehörigkeit zum Komplex vierten Grades muss die zugeordnete Grade auch in β_8 denselben Strahl treffen. Ersichtlich ist, dass die zugeordnete Grade zu einer von den 28 Graden sich auch unter den 28 Graden befinden muss. Die 28 gruppieren sich also in 14 Paare von Graden, von denen jedes als Leitstrahlenpaar ein Strahlennetz mit den geforderten Eigenschaften bestimmt. Folglich:

Es gibt 14 Strahlennetze, die in acht gegebene Strahlenbüschel je einen Strahl schicken.

Zweite Fassung:

28 Graden im Raume besitzen eine zugeordnete bezüglich acht gegebener Strahlenbüschel.

17.

$$B g_f h_e , \; B g_f h_p , \; B \beta g_f h, \; B \beta^2 g_f , \; B^2 g_f , \; B^2 g_s h.$$

Alle diese Bedingungen bis auf die letzte enthalten gleichzeitig die Forderungen B und g_f, d. h. es wird verlangt, dass irgend ein beliebig gegebener Strahl dem Strahlennetz angehören soll und dass eine zweite beliebig gegebene Grade Leitstrahl für das Strahlennetz sein soll. Nach der Definition des Strahlennetzes muss jeder Strahl desselben den beiden Leitgraden begegnen. Die beiden Graden der Bedingungen B und g_f müssten also einander begegnen, wenn ein Strahlennetz möglich sein sollte. Da sie aber wegen der Allgemeinheit ihrer Lage dies im allgemeinen nicht tun, so führen alle an der Spitze stehenden Kombinationen von Be-

dingungen zu keinem einzigen Strahlennetz, das diesen Forderungen entspricht.

Wird von einem Strahlennetze unter anderem verlangt, dass es eine gegebene Grade zur einen Leitgrade haben und eine andere gegebene Grade enthalten soll, so sind das zwei unvereinbare Bedingungen.

Auch die Bedingung $B^2 g_s h$ ist unerfüllbar, da derselbe Strahl des Büschels der g nicht den beiden beliebig gegebenen Graden der Bedingung B^2 begegnen kann.

18.

$B g_s h_s$.

Die beliebig gegebene Grade b der Bedingung B muss als Strahl des Strahlennetzes von beiden Leitgraden getroffen werden. In dem Strahlenbüschel, auf den der Leitstrahl g durch die Bedingung g_s beschränkt ist, gibt es nur einen Strahl, der b trifft; ebenso in dem Büschel, dem der zweite Leitstrahl h angehören muss. Diese beiden Strahlen aus den beiden Büscheln bestimmen ersichtlich als Leitstrahlen das einzige Strahlennetz, das den gestellten Bedingungen genügt. Also:

Es gibt ein einziges Strahlennetz, das eine beliebig gegebene Grade enthält und deren beide Leitstrahlen je einem gegebenen Strahlenbüschel angehören.

19.

$B \beta g_s h_e$ ($B \beta g_s h_p$).

Da die Grade b der Bedingung B dem Strahlennetze angehören soll, so kann der eine Leitstrahl g, der durch die Bedingung g_s auf ein Strahlenbüschel beschränkt ist, nur eine einzige Lage einnehmen ; es kann nämlich nur derjenige Strahl dieses Büschels sein, der von b getroffen wird. Ferner soll das Strahlennetz in dem Büschel der Bedingung β einen Strahl besitzen; daher haben wir in demjenigen Strahl b_1 dieses Büschels, der von dem schon eindeutig bestimmten Leitstrahl g getroffen wird, einem zweiten Strahl b_1, welcher dem Strahlennetz angehören muss. Der zweite Leitstrahl h

muss also sowohl der Grade b als der b_1 begegnen. Da h nun aber laut der Bedingung h_e einer gegebenen Ebene angehören soll, so ist nur ein einziger zweiter Leitstrahl h möglich, die Verbindungslinie der Spurpunkte von b und b_1 in jener Ebene. Es ergibt sich also nur ein einziges Leitstrahlenpaar.

Für die Bedingungen $B\beta g_s h_p$ lässt sich in dualer Weise genau dasselbe feststellen. Folglich:

Nur ein einziges Strahlennetz ist möglich, dass einen gegebenen Strahl enthält, in einem beliebig gegebenen Strahlenbüschel einen Strahl besitzt und von dessen Leitgraden die eine einem gegebenen Strahlenbüschel angehört, die andere in einer gegebenen Ebene liegt oder durch einen gegebenen Punkt geht.

20.

$B\beta^2 g_s h.$

Die Bedingungen B und g_s geben, wie sich schon in der vorigen Aufgabe gezeigt hat, dem einen Leitstrahl g eine eindeutig bestimmte Lage. Dieser eine Leitstrahl bestimmt in den beiden Strahlenbüscheln der Bedingung β^2 zwei Strahlen, die dem Strahlennetze angehören müssen. Der zweite Leitstrahl h muss nun erstens diese beiden Strahlen treffen, weil sie Strahlen des Strahlennetzes sein sollen, zweitens die beliebige Grade der Bedingung B aus demselben Grunde und drittens eine weitere beliebig gegebene Grade wegen der Bedingung h. Der Leitstrahl h muss also im ganzen vier Graden treffen; jede der beiden Treffgraden dieser vier kann demnach als zweiter Leitstrahl fungieren. Die eindeutig bestimmte Grade g und eine von diesen beiden liefern somit das Leitstrahlenpaar eines Strahlennetzes mit den verlangten Eigenschaften. Also:

Es gibt zwei Strahlennetze, die einen gegebenen Strahl enthalten, in zwei gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen und von deren Leitgraden die eine einem weiteren gegebenen Strahlenbüschel angehört und die andere eine gegebene Grade trifft.

21.

$B\beta^2 g_p\, h_p\, (B\beta^2 g_e\, h_e)$.

Die Grade der Bedingung B nennen wir b; die beiden Strahlenbüschel der Bedingung β^2 bezeichnen wir mit β_1 und β_2 und die Punkte der beiden Bedingungen g_p und h_p bezw. mit G und H. Da die Leitstrahlen des gesuchten Strahlennetzes der Grade b begegnen und ausserdem durch die Punkte G bezw. H gehen müssen, so ist der Leitstrahl g auf den Strahlenbüschel beschränkt, der G als Scheitelpunkt und die Ebene (G, b) als Trägerebene hat, und der Leitstrahl h muss dem durch den Punkt H und die Ebene (H, b) bestimmten Strahlenbüschel angehören. Diese beiden Strahlenbüschel sollen (g) bezw. (h) genannt werden.

Die Frage nach den bei den Bedingungen $B\beta^2 g_p\, h_p$ möglichen Strahlennetzen kommt ersichtlich nun auf die Frage hinaus, wievielmal es vorkommt, dass ein Strahl des Büschels (g) die beiden Büschel β_1 und β_2 in zwei solchen Strahlen trifft, die ihrerseits demselben Strahl des Büschels (h) begegnen. In dem Büschel (g) stellen wir uns folgende Projektivität her. Ein Strahl x aus (g) sondert aus dem Büschel β_1 einen Strahl aus, der seinerseits einen Strahl des Büschels (h) trifft. Dieser Strahl in (h) begegnet einem Strahl des Büschels β_2, der wiederum in (g) einen Strahl x′ trifft, den wir dem Ausgangsstrahl x zuordnen. Man erkennt umgekehrt leicht, dass jedem x′ auch nur ein einziger x zugeordnet ist; denn die beiden Büschel β_1 und β_2 ändern dann nur ihre Reihenfolge. Die Zuordnung in (g) ist demnach eindeutig, und damit ist sie als Projektivität erkannt. Die beiden Koinzidenzstrahlen können nur dadurch zustande kommen, dass ein Strahl aus (g) zwei solche Strahlen aus β_1 und β_2 trifft, die demselben Strahl des Büschels (h) begegnen. Andererseits übersieht man, dass jeder derartige Strahl in (g) zu einer Koinzidenz führen muss, sodass also die beiden Koinzidenzen in (g) die einzigen Strahlen mit der angegebenen Eigenschaft sind. Jeder dieser beiden Strahlen mit dem zugehörigen Strahl des Büschels (h) liefert also ein Leitstrahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften.

Dual dazu lässt sich finden, dass auch bei den Bedingungen $B\beta^2 g_e h_e$ zwei Strahlennetze möglich sind. Also:

Es gibt zwei Strahlennetze, die einen gegebenen Strahl enthalten, in zwei gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen und von deren Leitgraden jede durch einen gegebenen Punkt geht oder in einer gegebenen Ebene liegt.

22.

$B\beta^2 g_e h_p$.

Wegen der Bedingungen B und g_e ist der Leitstrahl g auf den Strahlenbüschel (g) beschränkt, der die beliebige Ebene der Bedingung g_e zur Trägerebene hat und den Spurpunkt der Grade der Bedingung B zum Scheitel. Der zweite Leitstrahl h muss wegen der Bedingungen B und h_p ebenfalls einem Strahlenbüschel (h) angehören, wie wir schon in der vorigen Aufgabe auseinandergesetzt haben. Auch unser jetziges Problem läuft auf die Frage hinaus, wieviele Graden es in (g) gibt, die β_1 und β_2 in zwei Strahlen treffen, welche ein und demselben Strahl von (h) begegnen. Das tritt, wie schon gezeigt, zweimal ein. Also:

Man kann zwei Strahlennetze finden, die einen gegebenen Strahl enthalten, in zwei gegebene Strahlenbüschel je einen Strahl senden und von deren Leitstrahlen der eine durch einen beliebigen Punkt geht, der andere in einer beliebigen Ebene liegt.

23.

$B\beta^3 g_s$.

Der Strahlenbüschel, auf den gemäss der Bedingung g_s der eine Leitstrahl g beschränkt ist, trifft die beliebige Grade b der Bedingung B mit einem einzigen Strahl. Der Leitstrahl g ist also durch die Bedingungen B und g_s eindeutig bestimmt. Infolgedessen ist auch in den drei Büscheln der Bedingung β^3 je der Strahl bestimmt, der dem gesuchten Strahlennetz angehören soll; es sind nämlich die drei von g getroffenen Strahlen. Diesen drei sowie der Grade b muss

daher der zweite Leitstrahl h begegnen. Ausser g besitzen diese vier Graden aber im allgemeinen nur noch einen einzigen zweiten Treffstrahl, sodass also auch h laut unsern Bedingungen nur eine einzige Lage einnehmen kann.

Demnach:

Nur ein einziges Strahlennetz ist möglich, das einen gegebenen Strahl enthält, in drei gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzt und von dessen Leitgraden die eine einem weiteren gegebenen Strahlenbüschel angehört.

24.

$B\beta^3 g_e h (B\beta^3 g_p h)$.

Der Leitstrahl g kann, da er wegen der Bedingung g_e in der beliebigen Ebene Γ liegen muss und wegen der Bedingung B die beliebige Grade b treffen muss, nur einer von den Strahlen des Büschels sein, das Γ zur Trägerebene und den Spurpunkt von b in Γ zum Scheitel hat; wir nennen dieses Büschel (g). Zwischen den drei Strahlenbüscheln der Bedingung β^3 entsteht nun eine Projektivität, wenn man solche Strahlen der drei Büschel einander zuordnet, die nach demselben Strahl des Büschels (g) gehen. Alle Graden, welche drei entsprechende Strahlen treffen, bilden eine Kongruenz [3, 3] (vergl. S. 8). Dieser Kongruenz muss ersichtlich der zweite Leitstrahl h angehören. Ferner muss h wegen der Bedingung B der Grade b und wegen der Bedingung h einer beliebigen Grade $\bar{h}$ begegnen, d. h. der Leitstrahl h muss zweitens der durch die Graden b und $\bar{h}$ als Leitgraden bestimmten Kongruenz [1, 1] angehören. Beide Kongruenzen haben nach dem ersten Halphenschen Satze $3.1 + 3.1 = 6$ Graden gemeinsam. Eine von diesen sechs ist die Grade des Büschels (g), welche nach dem Spurpunkt von $\bar{h}$ in Γ geht; denn sie gehört sowohl der Kongruenz [3, 3] wie der Kongruenz [1, 1] an, wie man ja ohne weiteres übersieht. Was gilt von den fünf übrigen? Jeder derselben trifft b und h, weil er der linearen Kongruenz angehört, und, weil er der Kongruenz

[3, 3] angehört, gibt es in dem Büschel (g) einen Strahl, der denselben drei Strahlen aus den drei Büscheln der Bedingung β^3 begegnet. Dieser Strahl in (g) und derjenige von den fünf Strahlen, zu dem er gehört, bilden also das Leitstrahlenpaar eines Strahlennetzes mit den verlangten Eigenschaften.

Zu demselben Resultat müssen auch die dualen Bedingungen $B\beta^3 g_p h$ führen. Folglich:

Es gibt fünf Strahlennetze, die einen gegebenen Strahl enthalten, in drei gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen und von deren Leitstrahlen der eine einer gegebenen Grade begegnet, der andere in einer gegebenen Ebene liegt oder durch einen gegebenen Punkt geht.

25.

$B\beta^4 gh$.

Mit b bezeichnen wir die Grade der Bedingung B, mit $\bar{g}$ bezw. $\bar{h}$ die Graden der Bedingungen g und h. Wie wir aus dem Satz in II, 8 wissen, bilden die Graden durch b, welche eine zugeordnete bezüglich der vier Strahlenbüschel der Bedingung β^4 besitzen, die ebenfalls der b begegnet, eine Kongruenz [3, 3]. Ferner zeigt der Satz in II, 7, dass alle Graden durch $\bar{g}$, welche eine zugeordnete bezüglich derselben vier Büschel besitzen, die der Grade $\bar{h}$ begegnet, eine Kongruenz [7, 7] bilden. Beide Kongruenzen haben Satze $3.7 + 3.7 = 42$ Graden gemeinsam.

Wir stellen zunächst die Anzahl derjenigen unter den 42 Graden fest, welche bezüglich der vier Büschel mehr als eine zugeordnete besitzen. Alle Graden im Raume, die mehr als eine solche zugeordnete besitzen, gehören entweder der Kongruenz [3, 3], die gemäss des dritten Hilfssatzes mit den vier Büscheln verbunden ist, oder einem der vier Gradenfelder oder einem der vier Strahlenbündel an, deren Ebenen bezw. Scheitel die Trägerebenen und die Scheitel der vier Büschel sind. Sämtliche Graden mit dieser besonderen Eigenschaft bilden also zusammen eine Kongruenz

[7, 7]. Zum Unterschiede gegen die oben auftretende Kongruenz [7, 7] wollen wir die jetzige mit (7, 7) bezeichnen. Die zunächst zu behandelnde Frage kann demnach auch so formuliert werden: wieviele von den 42 Graden gehören dieser Kongruenz (7, 7) an?

Jede Grade dieser Kongruenz (7, 7), die b trifft, gehört einfach der oben definierten Kongruenz [3, 3] an; denn als Grade der Kongruenz (7, 7) besitzt sie eine ganze Regelschar von Graden, die ihr bezüglich der vier Büschel zugeordnet sind; in dieser Regelschar, zu der die Grade selbst gehört, muss ausser ihr noch eine zweite Grade vorhanden sein, die b trifft. Die Graden dieses Strahlengebüsches mit b als Achse haben nach einem schon oft zitierten Satze mit der Kongruenz (7, 7) eine Regelfläche vom Grade $7 + 7 = 14$ gemeinsam. Von dieser Regelfläche treffen 14 Graden die Grade $\bar{g}$. Da diese 14 als Graden der Regelfläche ja auch der Kongruenz (7, 7) angehören, besitzt jede von ihnen eine Regelschar von zugeordneten Graden bezüglich der vier Büschel. Der Graden h begegnen zwei von ihnen, wodurch wir erkannt haben, dass jede der 14 Graden zweifach der Kongruenz [7, 7] angehört. Diese 14 Graden, welche den Kongruenzen [3, 3], [7, 7] und (7, 7) gemeinsam sind, zählen demnach für $2.14 = 28$ gemeinsamen Graden der Kongruenzen [3, 3] und [7, 7], sie liefern uns also 28 von den 42 Graden.

Für jede der $42—28 = 14$ übrigen Graden gilt folgendes: sie besitzt nur eine einzige zugeordnete Grade bezüglich der vier Büschel; sie trifft b, und die zugeordnete tut es ebenfalls wegen ihrer Zugehörigkeit zur Kongruenz [3, 3]; sie begegnet $\bar{g}$, und die zugeordnete h, weil sie zur Kongruenz [7, 7] gehört. Jede von diesen 14 Graden liefert demnach mit ihrer zugeordneten ein Leitstrahlenpaar mit den gewünschten Eigenschaften. Also:

Es gibt 14 Strahlennetze, die einen gegebenen Strahl enthalten, in vier gegebene Strahlenbüschel je einen Strahl senden und von deren Leitstrahlen jeder einer gegebenen Grade begegnet.

26.

$B\beta^5 g$.

Die Graden der Bedingungen B und g nennen wir b bezw. $\bar{g}$ und die fünf Strahlenbüschel der Bedingung β^5: $\beta_1, \ldots \beta_5$. Nach II, 8 bilden die Graden durch b, weche bezüglich $\beta_1, \ldots \beta_4$ eine zugeordnete besitzen, die ebenfalls der b begegnet, eine Kongruenz [3, 3]. Ferner lässt sich aus dem Satz in II, 9 folgern, dass alle Graden, welche $\bar{g}$ treffen und eine zugeordnete bezüglich $\beta_1, \ldots \beta_5$ besitzen, eine Kongruenz [4, 4] bilden. Beide Kongruenzen haben $3.4 + 3.4 = 24$ Graden gemeinsam.

Wir untersuchen zunächst wieder, wieviele von diesen 24 Graden der Kongruenz (7, 7) angehören, die wir in der vorigen Aufgabe definiert haben, wobei wir diesmal der Definition die vier Büschel $\beta_1, \ldots \beta_4$ zugrunde legen.

Diejenigen Graden der Kongruenz [3, 3], die auch der Kongruenz (7, 7) angehören, bilden, wie sich schon bei der vorigen Aufgabe ergeben hat, eine Regelfläche vom Grade 14. Von diesen Graden treffen 14 die Grade $\bar{g}$. Wegen der Zugehörigkeit dieser 14 Graden zur Kongruenz (7, 7) muss es bei jeder von ihnen eine Grade geben, die denselben fünf Strahlen aus $\beta_1, \ldots \beta_5$ begegnet. Diese 14 Graden gehören also einfach der Kongruenz [4, 4] und einfach der Kongruenz [3, 3] an. Von den 24 gemeinsamen Graden dieser beiden Kongruenzen gehören demnach 14 zur Kongruenz (7, 7), d. h. 14 von ihnen haben mehr als eine zugeordnete Grade bezüglich $\beta_1, \ldots \beta_4$.

Jeder von den $24 - 14 = 10$ übrigen Graden hat nun ersichtlich folgende Eigenschaften: sie trifft b und $\bar{g}$, und der einzige zugeordnete Strahl bezüglich $\beta_1, \ldots \beta_4$ muss auch in dem Büschel β_5 denselben Strahl wie sie selbst treffen und ausserdem der Grade b begegnen. Jede der Graden mit ihrer zugeordneten liefert also ein Leitstrahlenpaar mit den geforderten Eigenschaften. Demnach:

Es sind 10 Strahlennetze möglich, die einen gegebenen Strahl enthalten, in fünf gegebenen Strahlenbüscheln je einen

Strahl besitzen und deren eine Leitgrade einer gegebenen Grade begegnet.

27.

$B\beta^6$.

Sämtliche Graden, welche der Graden b der Bedingung B begegnen und eine zugeordnete bezüglich der vier Büschel $\beta_1,..\beta_4$ haben, die ebenfalls b trifft, bilden, wie wir wissen, eine Kongruenz [3, 3]. Ferner lehrt uns der Satz in II, 13, dass diejenigen Graden im Raume, welche eine zugeordnete bezüglich der sechs Büschel $\beta_1,..\beta_6$ besitzen, eine Kongruenz [9, 9] bilden. Beide Kongruenzen haben $3.9 + 3.9 = 54$ Graden gemeinsam.

Festzustellen ist wiederum, wieviele von diesen 54 Graden mehr als eine zugeordnete bezüglich $\beta_1,..\beta_4$ besitzen. In dem vorliegenden Falle müssen wir aber die beiden Arten von Graden, bei denen dies eintritt, gesondert behandeln.

Zunächst wollen wir dazu untersuchen, wieviele von den 54 Graden der Kongruenz [3, 3] angehören, welche nach dem dritten Hilfssatze mit den vier Büscheln $\beta_1,..\beta_4$ verbunden ist. Wir wollen sie jedoch Kongruenz (3, 3) nennen im Gegensatz zu der oben auftretenden Kongruenz [3, 3]. Von den Graden der Kongruenz (3, 3) bilden diejenigen, welche die Grade b treffen, eine Regelfläche sechsten Grades. Da jede Grade dieser Regelfläche eine ganze Regelschar von zugeordneten bezüglich $\beta_1,..\beta_4$ hat, so gehört sie, wie schon mehrfach gezeigt, der Kongruenz [3, 3] an. Aus dem Satze in II, 9 wissen wir, dass alle Graden, welche bezüglich der fünf Büschel $\beta_2,..\beta_6$ eine zugeordnete Grade besitzen, einen Komplex vierten Grades bilden. Dieser Komplex hat mit der Regelfläche sechsten Grades $6.4 = 24$ Graden gemeinsam. Da diese Graden ja auch der Kongruenz (3, 3) angehören, schliessen wir wie früher (vergl. die analogen Betrachtungen auf S. 33), dass sie auch der Kongruenz [9, 9] angehören, wenigstens soweit sie nicht in einer der Ebenen oder in einem der Strahlenbündel um die Scheitel der dre

Büschel $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ liegen. Wir müssen daher die Anzahl derjenigen von den 24 Graden, welche diese Ausnahmestellung einnehmen, feststellen. Betrachten wir die Ebene des Büschels β_2. Sie enthält von den Graden, welche b treffen, einen Strahlenbüschel, nämlich den um den Spurpunkt von b in der Ebene von β_2. Ferner gehört das Gradenfeld der Ebene β_2 ersichtlich dem Komplex vierten Grades an. Von der Kongruenz (3, 3) liegen in unserer Ebene unendlich viele Graden, die einen Kegelschnitt umhüllen (vergl. S. 14). Da zwei von diesen Graden dem obigen Strahlenbüschel angehören, so liegen zwei von den 24 Graden in der Ebene von β_2. Dual ergibt sich, dass zwei von ihnen dem Strahlenbündel um den Scheitel von β_2 angehören. Ebenso findet man bei β_3 und β_4 je vier solcher Graden. Unter den 24 Graden gibt es also im ganzen $3.4 = 12$ Graden, die die Sonderstellung einnehmen, dass für sie der Schluss auf die Zugehörigkeit zu den beiden Kongruenzen [3, 3] und [9, 9] nicht berechtigt ist. Für die 12 übrigen Graden können wir jedoch diese Folgerung ziehen, sodass wir also erkannt haben, dass sich 12 Graden unter den 54 befinden, die der Kongruenz (3, 3) angehören.

Wenden wir uns nun zu der zweiten Art von Graden, die mehr als eine zugeordnete bezüglich $\beta_1, .. \beta_4$ besitzen, nämlich zu den vier Strahlenfeldern und den vier Strahlenbündeln, die zu $\beta_1, .. \beta_4$ gehören. Fassen wir beispielsweise die Ebene B_1 von β_1 ins Auge. Sie enthält, wie man leicht durch analoge Schlüsse wie auf S. 33 erkennt, von der Kongruenz [3, 3] einen Strahlenbüschel, nämlich den um den Spurpunkt von b in B_1, und von der Kongruenz [9, 9] eine Kurve vierter Klasse (vergl. auch II, 9). Die vier gemeinsamen Strahlen der Kurve und des Strahlenbüschels sind also zu den 54 gemeinsamen Graden der beiden Kongruenzen gehörig. Alle vier Strahlenfelder und alle vier Strahlenbündel liefern also $8.4 = 32$ Graden von den 54.

Unter den 54 Graden gibt es demnach im ganzen $32 + 12 = 44$, die mehr als einen zugeordneten Strahl bezüglich $\beta_1, .. \beta_4$ besitzen. Jeder der 10 übrigen Strahlen

besitzt nur einen einzigen solchen zugeordneten Strahl. Dieser muss, da die 10 Strahlen der Kongruenz [3, 3] angehören, der Grade b begegnen, ebenso wie derjenige von den 10, zu dem er gehört. Weil die 10 Graden ferner der Kongruenz [9, 9] angehören, muss derselbe zugeordnete Strahl auch in β_5 und β_6 dieselben Strahlen treffen. Ersichtlich ist ohne weiteres, dass der zu einem von den zehn gehörige zugeordnete Strahl, sich ebenfalls unter den zehn Graden befinden muss. Diese zehn gruppieren sich also zu fünf Paaren, von denen jedes ein Leitstrahlenpaar mit den gewünschten Eigenschaften bildet. Folglich:

Es gibt fünf Strahlennetze, die einen gegebenen Strahl enthalten und in sechs gegebene Strahlenbüschel je einen Strahl schicken.

28.

$$B^2 g_e h_e (B^2 g_p h_p).$$

Die Graden der Bedingung B^2 nennen wir b_1 und b_2. Da beide Leitstrahlen diese beiden Graden treffen müssen und ausserdem durch die Bedingungen g_e bezw. h_e jeder auf eine gegebene Ebene beschränkt ist, so ist für jeden nur eine einzige Lage möglich. Der Leitstrahl g ist nämlich bestimmt als Verbindungslinie der beiden Spurpunkte von b_1 und b_2 in der Ebene der Bedingung g_e und entsprechend auch der zweite Leitstrahl h. Wir gelangen also nur zu einem einzigen Leitstrahlenpaar, welches den gestellten Bedingungen genügt.

Die dualen Bedingungen $B^2 g_p h_p$ müssen zu demselben Resultat führen. Also:

Man kann nur ein einziges Strahlennetz konstruieren, das zwei gegebene Graden enthält und dessen Leitstrahlen je in einer beliebigen Ebene liegen oder durch einen beliebigen Punkt gehen.

29.

$$B^2 g_e h_p .$$

Für den Leitstrahl g ist, wie die vorige Aufgabe zeigt, nur eine einzige Lage möglich. Der Leitstrahl h muss

wegen der Bedingung B^2 zwei beliebige Graden treffen, also dem durch diese beiden als Leitstrahlen bestimmten Strahlennetz angehören. Da h ferner wegen der Bedingung h_p durch einen beliebigen Punkt gehen muss, so ist auch nur ein einziger Leitstrahl h möglich; denn von jedem Strahlennetz geht nur eine Grade durch einen beliebigen Punkt. Wir erhalten mithin auch hier nur ein Leitstrahlenpaar. Demnach:

Es gibt nur ein einziges Strahlennetz, das zwei gegebene Graden enthält und von dessen Leitgraden die eine in einer beliebigen Ebene liegt, die andere durch einen beliebigen Punkt geht.

30.

$B^2 \beta g_s$.

Da der Leitstrahl g den beiden Graden der Bedingung B^2 begegnen muss, so ist er dadurch auf das durch jene beiden Graden als Leitgraden bestimmte Strahlennetz beschränkt. Ferner soll g wegen der Bedingung g_s einem beliebigen Strahlenbüschel angehören. Ein Strahlennetz besitzt nun in einem beliebig gelegenen Strahlenbüschel im allgemeinen keine Grade. Es lässt sich also im allgemeinen keine Grade g finden, die den beiden Bedingungen B^2 und g_s genügt. Es kann demnach auch kein Strahlennetz mit den gewünschten Eigenschaften vorhanden sein. Also:

Es lässt sich kein einziges Strahlennetz finden, das zwei beliebige Graden enthält, in einem gegebenen Strahlenbüschel einen Strahl besitzt und dessen eine Leitgrade einem gegebenen Strahlenbüschel angehört.

31.

$B^2 \beta g_e\, h (B^2 \beta g_p\, h)$.

Wegen der beiden Bedingungen B^2 und g_e kann der Leitstrahl g, wie sich schon in II, 28 ergeben hat, nur eine einzige Lage einnehmen. Dieser eindeutig bestimmte Leitstrahl g legt in dem Strahlenbüschel der Bedingung β eindeutig den Strahl fest, der dem gesuchten Strahlennetz angehören muss; es ist der von g getroffene Strahl. Wir haben

jetzt also drei bestimmte Graden, die dem Strahlennetz angehören müssen, nämlich den eben erwähnten Strahl und die beiden Graden der Bedingung B^2. Diesen drei muss der zweite Leitstrahl h begegnen, ferner muss aber h wegen der Bedingung h noch eine weitere Grade treffen. Es sind also für h zwei Lagen möglich, weil die eben erwähnten vier Graden zwei Treffgraden besitzen. Der einzige Leitstrahl g zusammen mit einem der beiden h liefert also ein Leitstrahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften.

Ersichtlich kommt man bei den dualen Bedingungen $B^2 \beta g_p$ h zu demselben Resultat. Also:

Es gibt zwei Strahlennetze, die zwei beliebige Graden enthalten, in einem gegebenen Strahlenbüschel einen Strahl besitzen und von deren Leitstrahlen der eine einer gegebenen Grade begegnet, der andere in einer gegebenen Ebene liegt oder durch einen gegebenen Punkt geht.

32.

$B^2 \beta^2 g_p$ ($B^2 \beta^2 g_e$).

Infolge der Bedingungen B^2 und g_p ist der Leitstrahl g, wie sich in II, 29 gezeigt hat, eindeutig bestimmt. Dieser g trifft jedes der beiden Büschel der Bedingung β^2 in einem Strahl; beide müssen dem gesuchten Strahlennetz angehören. Der zweite Leitstrahl h muss also diesen beiden Graden sowie den beiden Graden der Bedingung B^2 begegnen. Da diese vier Graden ausser dem Leitstrahl g nur noch eine einzige zweite Treffgrade besitzen, so kommen wir nur zu einem einzigen Leitstrahlenpaar, das den gestellten Bedingungen Genüge leistet.

Dasselbe Ergebnis müssen wir auch bei den Bedingungen $B^2 \beta^2 g_e$ erhalten, sodass folgender Satz gilt:

Ein einziges Strahlennetz ist möglich, das zwei beliebig gegebene Graden enthält, in zwei gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzt und von dessen Leitstrahlen der eine durch einen gegebenen Punkt geht oder in einer beliebigen Ebene liegt.

33.

$B^2\beta^2gh$.

Der Leitstrahl g muss infolge der Bedingung B^2 zwei beliebigen Graden b_1 und b_2 begegnen und wegen der Bedingung g einer weiteren beliebigen Grade $\bar{g}$; er muss also der durch b_1, b_2 und $\bar{g}$ als Leitgraden bestimmten Regelschar angehören, die wir (g) nennen. Bezeichnen wir die Grade der Bedingung h mit $\bar{h}$, so folgt entsprechend, dass h auf der Regelschar liegen muss, die durch b_1, b_2 und $\bar{h}$ als Leitgraden bestimmt ist und die wir (h) nennen wollen. Wir stellen uns nun in dem einem Strahlenbüschel β_1 der Bedingung β^2 folgendermassen eine Korrespondenz her. Ein Strahl x in β_1 wird von zwei Graden der Regelschar (h) getroffen. Diese beiden treffen in β_2, dem zweiten Büschel der Bedingung β^2, zwei Strahlen, von denen jeder zwei, beide also vier Graden in der Regelschar (g) treffen. Nach diesen vier Graden gehen aus dem Büschel β_1 vier Strahlen x′, die wir dem Ausgangsstrahl x zuordnen. Andererseits folgt aus dieser Zuordnung, dass auch jedem Strahl x′ vier Strahlen x zugeordnet sind; denn man braucht ja nur die beiden Regelscharen (g) und (h) ihre Reihenfolge ändern zu lassen, um das zu erkennen. In dem Strahlenbüschel β_1 hat sich also eine Korrespondenz [4,4] mit 8 Koinzidenzen ergeben.

Diese Koinzidenzen kommen auf zwei Arten zustande. Weil nämlich die Leitscharen der Regelscharen (g) und (h) die beiden Graden b_1 und b_2 gemeinsam haben, müssen auch (g) und (h) zwei Graden gemeinsam haben, es sind die beiden Treffgraden von b_1, b_2, $\bar{g}$ und $\bar{h}$. Wie man ohne weiteres erkennt, führen diese beiden Graden zu zwei Koinzidenzen der Korrespondenz. Für die zweite Art bleiben sechs übrig. Jeder von diesen Koinzidenzstrahlen scheidet aus der Regelschar (h) eine Grade aus, die β_2 in einem solchen Strahl trifft, dass eine von den beiden Graden der Regelschar (g), die von dem Strahl in β_2 getroffen werden, dem Ausgangsstrahl begegnet; und zwar können sich die beiden in betracht kommenden Graden der Regelscharen (g) und (h) nicht vereinigen, weil die einzigen beiden Graden, welche

(g) und (h) gemeinsam haben, schon bei der ersten Art von Koinzidenzen berücksichtigt sind. Es muss also sechsmal vorkommen, dass eine Grade von (g) 2 Strahlen aus β_1 und β_2 trifft, die beide demselben Strahl auf (h) begegnen, der jedoch nicht mit dem Strahl auf (g) zusammenfällt. Zwei solche zugeordnete Strahlen der beiden Regelscharen liefern also ein Leitstrahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften. Folglich:

Es gibt sechs Strahlennetze, die zwei gegebene Strahlen enthalten, in zwei gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen und von deren Leitgraden jede einer gegebenen Grade begegnet.

Dieser Satz lässt sich vielleicht etwas einfacher unter Zugrundelegung des zweiten Hilfssatzes (S. 6) beweisen. Der Leitstrahl g muss, wie wir wissen der Regelschar (g) angehören. Zwischen den beiden Büscheln β_1 und β_2 entsteht nun eine Korrespondenz [2,2], wenn wir einem Strahl x aus β_1 diejenigen beiden Strahlen in β_2 zuordnen, die nach den beiden von x in der Regelschar (g) getroffenen Graden gehen. Die Graden, welche zwei entsprechende Strahlen von β_1 und β_2 und ausserdem b_1 und b_2 treffen, bilden nach dem zweiten Hilfssatz eine Regelfläche vom Grade $2.(2+2)=8$. Zu dieser Regelfläche gehört ersichtlich die Regelschar (g), sodass ausser (g) nur eine Regelfläche sechsten Grades mit obiger Eigenschaft vorhanden ist. Es gibt also sechs Graden dieser Regelfläche, die der Grade $\overline{h}$ begegnen. Somit erkennen wir, dass es sechs Graden gibt, die den Graden b_1, b_2 und $\overline{h}$ begegnen und die β_1 und β_2 in zwei solchen Strahlen treffen, die derselben Grade von (g) begegnen. Wir sind demnach auch auf diesem Wege zu den sechs Leitstrahlenpaaren gelangt.

34.

$B^2\beta^4$.

Die beiden Graden der Bedingung B^2 nennen wir b_1 und b_2. Aus dem Satze in II, 8 wissen wir, dass alle Graden, die der Grade b_1 begegnen und eine zugeordnete bezüglich

der vier Büschel der Bedingung β^4 besitzen, welche ebenfalls b_1 trifft, eine Kongruenz [3, 3] bilden. Die Graden, welche dieselbe Eigenschaft bezüglich b_2 haben, bilden eine weitere Kongruenz [3, 3]. Beide Kongruenzen haben $3.3 + 3.3 = 18$ Graden gemeinsam.

Wir stellen zunächst wieder fest, wieviele von diesen 18 Graden mehr als eine zugeordnete bezüglich der vier Büschel besitzen. Sämtliche Graden mit dieser Eigenschaft bilden, wie wir schon in II, 26 gezeigt haben, eine Kongruenz (7, 7). Unsere nächste Aufgabe ist also, zu zeigen, wieviele Graden dieser Kongruenz (7,7) gleichzeitig auch den beiden am Anfang definierten Kongruenzen [3, 3] angehören. Unter den Graden, welche die beiden Graden b_1 und b_2 treffen, die mithin eine lineare Kongruenz bilden, gehören nach dem ersten Halphenschen Satze $7 + 7 = 14$ der Kongruenz (7, 7) an. Da jede von diesen 14 Graden der Kongruenz (7, 7) angehört, besitzt sie eine ganze Regelschar von zugeordneten Strahlen bezüglich der vier Büschel; darunter ist stets eine, welche der Grade b_1 begegnet, und eine, welche b_2 trifft. Alle 14 Graden gehören also auch beiden Kongruenzen [3, 3] an. Weitere Graden, die den beiden Kongruenzen [3, 3] und der Kongruenz (7, 7) gemeinsam sind, kann es nicht geben; denn die gemeinsamen Strahlen der beiden Kongruenzen [3, 3] müssen sich ersichtlich in der durch b_1 und b_2 als Leitstrahlen bestimmten linearen Kongruenz befinden.

Wir haben also unter den 18 Graden nur vier, die eine einzige zugeordnete bezüglich der vier Büschel besitzen. Dieser einzige zugeordnete Strahl muss, weil jede der vier Graden den beiden Kongruenzen [3,3] angehört, b_1 und b_2 treffen, ebenso wie die vier Graden selbst den beiden b_1 und b_2 begegnen müssen. Ohne weiteres ist auch hier zu übersehen, dass sich die zugeordneten Strahlen der vier auch unter den vier Graden befinden müssen.

Die vier Graden gruppieren sich also zu zwei Paaren, von denen jedes als Leitgradenpaar ein Strahlennetz bestimmt mit den gewünschten Eigenschaften. Demnach:

Es gibt zwei Strahlennetze, die zwei gegebene Strahlen enthalten und in vier gegebene Strahlenbüschel je einen Strahl schicken.

35.

$B^2\beta^3 g.$

b_1, b_2 und $\bar{g}$ seien die Graden der Bedingungen B^2 bezw. g. Die Leitgrade g kann dann nur der durch b_1, b_2 und $\bar{g}$ als Leitstrahlen bestimmten Regelschar (g) angehören. Wir fassen nun zunächst zwei von den drei Büscheln der Bedingung β^3 ins Auge, β_1 und β_2. Der zu einem Leitstrahl g gehörige Leitstrahl h muss ebenfalls den Graden b_1 und b_2 begegnen, ferner muss er die beiden Büschel β_1 und β_2 in denselben Strahlen wie g treffen. Da die vier Graden, b_1, b_2 und die beiden von g getroffenen Strahlen in β_1 und β_2, nur zwei Treffgraden besitzen, gibt es zu jedem g nur einen einzigen h. In dem zweiten Beweise des Satzes in II, 33 hat sich gezeigt, dass die zu sämtlichen Graden der Regelschar (g) gehörigen h eine Regelfläche sechsten Grades bilden. In dem dritten Strahlenbüschel β_3 der Bedingung β^3 stellen wir uns nun auf folgende Weise eine Korrespondenz her. Ein Strahl x des Büschels β_3 trifft zwei Graden der Regelschar (g), jeder von beiden gehört eindeutig auf der Regelfläche sechsten Grades ein h zu. Beide h scheiden aus β_3 zwei Graden x' aus, die wir dem x zuordnen. Andererseits erkennt man, dass jeder x' von sechs Graden h der Regelfläche sechsten Grades getroffen wird, die ihrerseits zu sechs Graden der Regelschar (g) gehören, welche die sechs dem Strahl x' zugeordneten Strahlen x in β_3 treffen. Unsere Zuordnung in β_3 ist also eine Korrespondenz [6, 2]. Diese besitzt 8 Koinzidenzen, die auf zwei verschiedene Weisen zustande kommen können. Eine Koinzidenz entsteht ersichtlich, wenn ein g mit dem zugehörigen h sich vereinigt. Um die Zahl dieser Fälle zu ermitteln, stellen wir zunächst die Zahl der Graden fest, die der Regelschar und der Regelfläche gemeinsam sind.

Zwischen den beiden Büscheln β_1 und β_2 entsteht eine Korrespondenz [2, 2], wenn man solche Strahlen zuordnet,

die nach denselben Graden der Regelschar (g) gehen (vergl. S. 55). Bei Gelegenheit des Beweises für den zweiten Hilfssatz hat sich gezeigt, dass alle Graden, welche zwei entsprechende Strahlen aus β_1 und β_2 sowie die Grade b_2 treffen, eine Kongruenz $[2 + 2, 2 + 2]$ bilden. Durch jeden beliebigen Punkt im Raume gehen also vier solcher Graden. Durch einen Punkt der Grade b_1 gehen demnach ausser einer Grade der Regelschar (g) noch drei Graden, die b_2 und zwei entsprechende Strahlen von β_1 und β_2 treffen, d. h. drei Graden der Regelfläche sechsten Grades. b_1 ist deshalb dreifache Leitgrade für die Regelfläche sechsten Grades, für die Regelschar (g) ist sie ersichtlich einfache Leitgrade. b_1 rechnet also als eine Schnittkurve dritter Ordnung. Dasselbe gilt für b_2. Es bleibt von der Gesamtschnittkurve 12. Ordnung noch ein Restschnitt sechster Ordnung übrig. Fassen wir irgend einen Punkt P dieses Restschnittes ins Auge. Als Punkt der Regelfläche sechsten Grades muss durch P eine Grade gehen, die unter anderm den beiden Graden b_1 und b_2 begegnet. Da P als Punkt der Schnittkurve aber auch auf der Regelschar (g) liegt, muss jene Grade auch der (g) angehören. Diese Grade ist also beiden Flächen gemeinsam. Der Restschnitt sechster Ordnung kann sich demnach nur aus sechs solchen gemeinsamen Strahlen zusammensetzen. Diese sechs gemeinsamen Graden brauchen aber nicht alle dadurch entstanden zu sein, dass sich zwei zugeordnete Strahlen der Regelschar und der Regelfläche vereinigt haben. Es kann auch vorkommen, dass eine von den sechs eine andere von den sechs zur zugeordneten hat. Dies kann jedoch nur ein einziges Mal eintreten, wie wir im folgenden zeigen wollen.

Wir formulieren zu diesem Zwecke noch einmal die zu beantwortende Frage, und zwar ändern wir die Fragestellung gleich so, wie sie für unsern Zweck am besten geeignet ist. Wieviele Graden gibt es auf der Regelschar (g), die β_1 und β_2 in zwei solchen Strahlen treffen, dass die zweite Treffgrade dieser beiden Strahlen und der Graden b_1 und b_2 wieder der Regelschar (g) angehört? Der Strahlenbüschel

β_1 induziert in der Regelschar (g) eine Involution, in der zwei Graden ein Paar bilden, die demselben Strahl in β_1 begegnen. Auf (g) ergibt sich eine zweite Involution, wenn wir dem Strahlenbüschel β_2 dieselbe Rolle wie β_1 übertragen. Da nun zwei Involutionen auf demselben unikursalen Träger nur ein Paar von Elementen gemeinsam haben, so gibt es in der Regelschar (g), die ja ein unikursales Gebilde ist, zwei Graden, die sowohl β_1 wie β_2 in demselben Strahl treffen. Es ist also nur ein einziges Paar von Graden auf (g) vorhanden, das aus gemeinsamen Graden der Regelfläche und der Regelschar besteht, die sich gegenseitig entsprechen in dem Sinne, wie wir oben das Entsprechen zweier Graden der Regelschar und der Regelfläche definiert haben. Die übrigen 4 gemeinsamen Strahlen von Regelschar und Regelfläche können also nur dadurch entstanden sein, dass sich zwei entsprechende Graden vereinigt haben. Von diesen vier Strahlen rühren also vier von den acht Koinzidenzen her.

Die vier übrigen Koinzidenzen können nur dadurch zustande kommen, dass es viermal vorkommt, dass ein Strahl g zu einem solchen von ihm verschiedenen Strahl h führt, der denselben Strahl in β_3 trifft wie g. Diese vier Koinzidenzen führen als zu vier Leitstrahlenpaaren mit den geforderten Eigenschaften. Demnach:

Es sind vier Strahlennetze möglich, die zwei gegebene Strahlen enthalten, in drei gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl besitzen und von deren Leitgraden die eine einer gegebenen Grade begegnet.

36.

$B^3 g_p$ ($B^3 g_e$).

Wegen der Bedingung B^3 muss der Leitstrahl g der Regelschar angehören, welche durch die drei Graden jener Bedingung als Leitstrahlen bestimmt ist; keine von den Graden dieser Regelschar geht aber im allgemeinen durch den beliebigen Punkt, durch den g wegen der Bedingung g_p gehen soll. Es ist also unmöglich einen Leitstrahl g zu finden, der allen Bedingungen genügt.

Zu demselben Resultat müssen auch die dualen Bedingungen $B^3 g_e$ führen. Also:

Man kann kein Strahlennetz finden, das drei beliebige Graden enthält und von dessen Leitgraden die eine durch einen beliebigen Punkt geht oder in einer beliebigen Ebene liegt.

37.

$B^3 gh$.

Der Leitstrahl g muss wegen der Bedingung B^3 drei beliebigen Graden begegnen, und wegen der Bedingung g muss er auch noch eine vierte beliebige Grade treffen. Eine von den beiden Treffgraden dieser vier Graden kann als Leitstrahl g für das gesuchte Strahlennetz gewählt werden. Auch für den zweiten Leitstrahl h sind aus entsprechenden Gründen zwei Lagen im Raume möglich. Jeder der beiden g liefert somit mit jedem der beiden h ein Leitstrahlenpaar, wie es unsere Aufgabe fordert; es gibt also vier solcher Paare. Folglich:

Es gibt vier Strahlennetze, die drei gegebene Graden enthalten und von deren Leitstrahlen jeder einer beliebig gegegebenen Grade begegnet.

38.

$B^3 \beta g$.

Die Bedingungen B^3 und g veranlassen, wie sich in der vorigen Aufgabe ergeben hat, dass der Leitstrahl g zwei verschiedene Lagen im Raume einnehmen kann. Diese beiden Lagen wollen wir g_1 und g_2 nennen. g_1 bestimmt als Leitstrahl des Strahlennetzes in dem Büschel der Bedingung β eindeutig denjenigen Strahl, der zu dem Strahlennetz gehört; es ist nämlich der von g_1 getroffene Strahl. Der zweite Leitstrahl h muss also diesem Strahl und den drei Graden der Bedingung B^3 begegnen; ausser g_1 tut dies aber nur noch eine einzige Grade. Die Grade g_1 hat uns demnach zu einem Leitstrahlenpaar mit den gewünschten Eigenschaften geführt. Das Gleiche muss natürlich auch g_2 tun. Also:

Es gibt zwei Strahlennetze, die drei gegebene Graden enthalten, in einem gegebenen Strahlenbüschel einen Strahl besitzen und von deren Leitstrahlen der eine einer gegebenen Grade begegnet.

39.

$B^3\beta^2$.

Durch die Bedingung B^3 werden beide Leitgraden auf die von den drei Graden dieser Bedingung als Leitstrahlen bestimmte Regelschar beschränkt. Jedes der beiden Strahlenbüschel induziert in den Graden dieser Regelschar je eine Involution (man vergleiche die Betrachtungen auf S. 59). Beide Involutionen haben ein Paar zugeordneter Graden gemeinsam, d. h. es gibt in der Regelschar zwei Graden, die in beiden Büscheln der Bedingung β^2 dieselben Strahlen treffen. Diese beiden Graden bilden ersichtlich das einzige Leitstrahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften. Also:

Es lässt sich nur ein einziges Strahlennetz finden, das drei gegebene Graden enthält und in zwei gegebenen Strahlenbüscheln je einen Strahl sendet.

40.

B^4.

Da die vier Graden der Bedingung B^4 von zwei Graden getroffen werden, erhält man nur ein Leitstrahlenpaar; also gilt der Satz:

Es gibt ein einziges Strahlennetz, das vier gegebene Graden enthält.

Mit den bisher behandelten Kombinationen der Bedingungen sind zwar noch nicht alle Möglichkeiten erschöpft. Es bleiben nämlich noch alle die Zusammenstellungen, welche einer der beiden Leitgraden g oder h mehrere Bedingungen gleicher oder auch verschiedener Art auferlegen. Aber alle diese Fälle bedürfen keiner besonderen Behandlung; denn sie lassen sich leicht auf die erledigten Aufgaben zurückführen. Im folgenden soll noch kurz gezeigt werden, auf

welche der früheren Probleme die neuen Kombinationen zurückgreifen.

Die Bedingungen $g_p\, g_e$, $g_p\, g_s$, $g_e\, g_s$, $g_e{}^3$, $g_p{}^3$, $g g_f$, $g_s{}^2$ sind unerfüllbar, wie man ohne weiteres erkennt, wenn man sich die Bedeutung der Symbole vergegenwärtigt.

Mit $g_e{}^2$ oder $g_p{}^2$ ist ersichtlich die Bedingung g_f gleichwertig, wobei die feste Grade, welche die Lage von g fixiert, die Schnittlinie der beiden Ebenen bezw. die Verbindungslinie der beiden Punkte ist.

Ferner gilt die Formel

$$g^2 = g_e + g_p \text{ [1]}.$$

Infolgedessen ergeben z. B. die beiden Resultate $g_p\, h_p\, \beta^4 = 5$ und $g_e\, h_p\, \beta^4 = 6$ das neue Resultat $g^2 h_p\, \beta^4 = 5 + 6 = 11$. In der Zusammenstellung der Ergebnisse am Schluss der Arbeit sind die Zahlen unter Nro. 41 auf diese Weise gewonnen. Die Nro. der Sätze, auf denen sie fussen, sind in Klammern beigefügt.

Die Bedingung g^3 schreibt vor, dass der Leitstrahl g drei gegebenen Graden begegnen soll, also einer gegebenen Regelschar angehören soll. So bedeutet z. B. $g^3 h_f\, \beta$, wieviele g gibt es in einer Regelschar, die mit einem festen h ein Strahlennetz bestimmen, das in ein gegebenes Strahlenbüschel einen Strahl schickt. Die Aufgabe $g_s\, h_f\, \beta$ hat gezeigt, dass sämtliche Graden des Raumes, welche dieser Bedingung genügen, einen linearen Komplex bilden. Der gegebenen Regelschar gehören demnach zwei Strahlen g mit der verlangten Eigenschaft an. Die Resultate unter Nro. 42 sind auf ähnliche Weise aus den früheren abgeleitet.

g^4 bedeutet, dass der Leitstrahl g vier gegebenen Graden begegnen soll. g ist also bestimmt, und zwar kann es zwei gleichberechtigte Lagen einnehmen. Es ist mithin

$$g^4 = 2 g_f .$$

Diese Formel liefert die Ergebnisse von Nro. 43 der Tabelle.

---

[1]) Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie. S. 23.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

1. $g_f\ h_s\ \beta = 1.$
2. $g_f\ h_p\ \beta^2 = 1.$
3. $g_f\ h\ \beta^3 = 2.$
4. $g_f\ \beta^4 = 1.$
5. $g_s\ h_s\ \beta^2 = 2.$
6. $g_s\ h_e\ \beta^3 = g_s\ h_p\ \beta^3 = 3.$
7. $g_s\ h\ \beta^4 = 7.$
8. $B\ \beta^4\ g_p = B\ \beta^4\ g_e = 3.$
9. $g_s\ \beta^5 = 4.$
10. $g_e\ h_e\ \beta^4 = g_p\ h_p\ \beta^4 = 5.$
11. $g_e\ h_p\ \beta^4 = 6.$
12. $g_e\ h\ \beta^5 = g_p\ h\ \beta^5 = 14.$
13. $g_e\ \beta^6 = g_p\ \beta^6 = 9.$
14. $g\ h\ \beta^6 = 38.$
15. $g\ \beta^7 = 28.$
16. $\beta^8 = 14.$
17. $B\ g_f\ h_e = B\ g_f\ h_p = B\ \beta\ g_f h = B\beta^2 g_f = B^2 g_f = B^2 g_s h = 0.$
18. $B\ g_s\ h_s = 1.$
19. $B\ \beta\ g_s\ h_e = B\ \beta\ g_s\ h_p = 1.$
20. $B\ \beta^2\ g_s\ h = 2.$
21. $B\ \beta^2\ g_p\ h_p = B\ \beta^2\ g_e\ h_e = 2.$
22. $B\ \beta^2\ g_e\ h_p = 2.$
23. $B\ \beta^3\ g_s = 1.$
24. $B\ \beta^3\ g_e\ h = B\ \beta^3\ g_p\ h = 5.$
25. $B\ \beta^4\ g\ h = 14.$
26. $B\ \beta^5\ g = 10.$
27. $B\ \beta^6 = 5.$
28. $B^2\ g_e\ h_e = B^2\ g_p\ h_p = 1.$
29. $B^2\ g_e\ h_p = 1.$
30. $B^2\ \beta\ g_s = 1.$
31. $B^2\ \beta\ g_e\ h = B^2\ \beta\ g_p\ h = 2.$
32. $B^2\ \beta^2\ g_p = B^2\ \beta^2\ g_e = 1.$
33. $B^2\ \beta^2\ g\ h = 6.$
34. $B^2\ \beta^4 = 2.$

35. $B^2\,\beta^3\,g = 4$.
36. $B^3\,g_p = B^3\,g_e = 0$.
37. $B^3\,g\,h = 4$.
38. $B^3\,\beta\,g = 2$.
39. $B^3\,\beta^2 = 1$.
40. $B^4 = 1$.
41. $g_f\,h^2\,\beta^2 = 2$ (*2*); $g_s\,h^2\,\beta^3 = 6$ (*6*); $g^2\,h_e\,\beta^4 = 11$ (*10* und *11*); $g^2\,h\,\beta^5 = 28$ (*14*); $g^2\,\beta^6 = 18$ (*13*); $B\,g_f\,h^2 = 0$ (*17*); $B\,\beta\,g_s\,h^2 = 2$ (*19*); $B\,\beta^2\,g^2\,h_e = B\,\beta^2\,g^2\,h_p = 4$ (*21*); $B\,\beta^3\,g^2\,h = 10$ (*24*); $B^2\,g^2\,h_e = B^2\,g^2\,h_p = 2$ (*28* und *29*); $B^2\,\beta\,g^2\,h = 4$ (*31*); $B^2\,\beta^2\,g^2 = 2$ (*32*); $B^3\,g^2 = 0$ (*36*).
42. $g^3\,h_f\,\beta = 2$ (*1*); $g^3\,h_s\,\beta^2 = 4$ (*5*); $g^3\,h_e\,\beta^3 = g^3\,h_p\,\beta^3 = 6$ (*6*); $g^3\,h\,\beta^4 = 14$ (*7*); $g^3\,\beta^5 = 8$ (*9*); $g^3\,B\,h_s = 2$ (*18*); $g^3\,B\,h_e\,\beta = 2$ (*19*); $g^3\,B\,h\,\beta^2 = 4$ (*20*); $g^3\,B\,\beta^3 = 2$ (*23*); $g^3\,B^2\,h = 0$ (*17*).
43. $g^4\,h_s\,\beta = 2$ (*1*); $g^4\,h_e\,\beta^2 = 2$ (*2*); $g^4\,h\,\beta^3 = 4$ (*3*); $g^4\,\beta^4 = 2$ (*4*); $g^4\,B\,h_e = g^4\,B\,h_p = g^4\,B\,\beta\,h = g^4\,B\,\beta^2 = g^4\,B^2 = 0$ (*17*).

Lebenslauf.

Am 20. November 1883 wurde ich, Ernst Weiss, evangelischer Konfession, zu Ossig, Krs. Lüben i. Schl., geboren als Sohn des Gutsbesitzers Ernst Weiss und seiner Frau Marie geb. Mückner. Ich besuchte die Volksschule sowie die höhere Knabenschule zu Lüben, darauf das Gymnasium der Königl. Ritterakademie zu Liegnitz, das ich Ostern 1903 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Meine akademische Ausbildung habe ich ausschliesslich an der Universität Breslau erhalten. Ich widmete mich dem Studium der Mathematik, Physik, Botanik und Zoologie.

Meinen verehrten Lehrern, den Herren:

Baumgartner, Brefeld, Ebbinghaus, Franz, Kneser, Kükenthal, Landsberg, Lummer, O. E. Meyer, E. Neumann, J. Partsch, Pax, Pringsheim, Rosanes, Rosen, Cl. Schäfer, Sturm, Zimmer

sage ich meinen tiefgefühlten Dank für die Förderung, die ich in ihren Vorlesungen und Übungen erhalten habe. Ganz besonders gilt mein Dank Herrn Geheimrat Sturm, der mir die Anregung zu der vorliegenden Arbeit gab.